LA MATEMATICA ROMANZATA

EGMONT COLERUS

LA MATEMATICA ROMANZATA

DALL'ABBACO ALL'INTEGRALE

Traduzione
dell'ing. TOMMASO JERVIS

MILANO
FRATELLI TREVES EDITORI

Rag. G. B. MILANI
Via Castello

TRADUZIONE DALL'EDIZIONE ORIGINALE
"VOM EINMALEINS ZUM INTEGRAL„ Vienna, 1936

90
SM
5897

PROPRIETÀ LETTERARIA

(Printed in Italy, 1937-XV)

Stamperia Mondaini e C. - Milano

PREFAZIONE DEL TRADUTTORE

Il libro di cui offriamo qui la traduzione italiana ha avuto un grande successo all'estero per il suo carattere affatto speciale: è scritto da un artista. Il quale spiega nella sua Prefazione le ragioni che l'hanno indotto a scriverlo, nè c'indugeremo a commentarle. Il titolo può forse indurre in errore: la matematica romanzata! No, non è uno dei soliti libri di cosidetta volgarizzazione in cui si vuol persuadere il lettore che, senza fatica, potrà imparare la matematica, che questa cosa è facilissima, un giuoco. L'autore fa sul serio e paragona la scorsa che egli va facendo col lettore nei campi della teoria dei numeri ad un'ascensione alpina. Ora per quanto diffuso l'alpinismo, non è da tutti di ascendere in montagna in cordata: occorrono certi requisiti essenziali che l'autore ricorda nella sua prefazione. Dati questi, è allora un piacere seguire la guida originale che si propone a noi in quell'ascensione del monte delle matematiche; la quale presenta talvolta dei passaggi difficili, vertiginosi.

La guida non ce li nasconde: si ferma a studiarli con noi; poi, dopo averci insegnata la tecnica per superarli, s'indugia a farci ammirare i nuovi panorami e l'armoniosa struttura del monte che si ascende con lui.

È raro che un artista s'interessi di matematica: più di frequente avviene l'inverso: che un matematico sia artista. Il Colerus si vale del suo talento di artista per presentarci con un suo garbo tutto particolare i più astratti concetti di matematica: basterebbe il solo capitolo sui numeri immaginari per fargli decretare un premio in Didattica.

Credo di dover avvertire il lettore che questo è un libro che va letto in ordine, anche da chi crede di conoscere l'ar-

gomento e cioè da capo a fondo. A rischio di perdere ciò che ne forma il pregio: la logica. La pazienza del lettore, che del resto non è affatto messa a dura prova, sarà largamente compensata dal godimento intellettuale di capire cose che in generale si trascurano perchè non si osa affrontarle.

Una delle maggiori difficoltà della traduzione è stata quella di badare a non tradire il pensiero dell'autore e di conservare la grazia e la freschezza dell'originale. Ci sono riuscito? Me lo dirà il lettore.

Dott. Ing. T. JERVIS

PREFAZIONE DELL'AUTORE

La Matematica è come una trappola per i sorci. Chi ne rimane prigioniero, difficilmente trova poi la via d'uscita per ricondursi alla primitiva condizione prematematica di spirito.

L'esporre le ragioni di questo fenomeno tipico mi condurrebbe troppo lontano: mi basta averne assodati gli effetti.

La prima conseguenza di questa proprietà di « trappola » della Matematica è la enorme carenza in buoni pedagoghi di questa scienza. Assai raramente si trova in essi accoppiata la conoscenza matematica e la comunicativa indispensabile all'insegnante. Onde una seconda conseguenza: il « complesso d'inferiorità matematica » assai diffuso fra gli intellettuali e gli amici della coltura.

E non mi si fraintenda! Non accuso nessuno; anzi, per contrario mi trovo nella condizione di dover difendere me stesso: non è invero cosa solita che una persona che non sia « del mestiere » si assuma l'incarico di esporre la più severa delle scienze.

E poiché ho potuto osservare, fin dai banchi della scuola, in me e nei miei compagni lo sforzo che questi studi necessitano, è maturata in me l'idea di raccontare le mie esperienze in Matematica, in una fase relativamente inferiore degli studi formativi, dappoiché devo riconoscere di temere l'anzidetta trappola, per me stesso, in quanto fra qualche anno non mi sarà più possibile di tornare indietro.

Ma una ragione più valida ancora mi ha spinto nella mia impresa. È evidente a tutti che la Matematica, i suoi metodi e il mondo dei concetti matematici, va estendendosi

in ogni campo delle Scienze; non solo, ma anche penetra nelle espressioni della ordinaria vita quotidiana. Ed è certo una condizione del tutto insoddisfacente, volevo dire uno «scandalo culturale», il fatto che un lettore, a metà di una seria trattazione, si venga a trovare dinanzi ad una serie di geroglifici che lo spaventano e lo ripugnano, oppure alla fine di un gustatissimo pasto intellettuale, debba lasciare sul piatto, con una scrollata ironica di spalle, una piccola porzione del dolce consacrato. E con ciò non voglio alludere alle sublimi altezze della teoria della Relatività o dei Quanti, ma ad argomenti che si vedono trattati in qualsiasi giornale di Economia politica o di Medicina. Facendo anche astrazione dalla Statistica, la quale, specie nei paesi anglosassoni, si va sempre più matematizzando.

Anzi, la Matematica si insinua persino nel linguaggio quotidiano: noi leggiamo nei giornali di «Bonifica integrale», di «Media aritmetica e geometrica» di «Optimum» di funzionamento, di «campi di forza», di «punti critici», e di simili espressioni che ci vengono direttamente dalla Matematica o da concetti della Fisica Matematica.

Ora sarebbe da scemi di considerare siffatte espressioni come suoni «vani e senza soggetto», di passare ai nostri stessi occhi da ignoranti o di ritenerci afflitti da un «complesso di inferiorità». Il contenuto concettuale delle suddette espressioni è altrettanto grandioso e significativo, quanto facile da comprendere e da ritenere (1).

Una premessa è necessaria: che esista in noi una certa irremissibile volontà di apprendere. Il più grande geometra della Grecia, Euclide, che visse circa 300 a. C. in Alessandria, venne una volta richiesto dal suo re Tolomeo Filadelfo, di un metodo «comodo» per apprendere la Matematica. «Non c'è via reale per le matematiche» gli ri-

(1) Esistono invero dei calcolatori fenomeno, come l'Inaudi e ora la Signa Osaka, che ti sbalordiscono con la rapidità del loro calcolo mnemonico. Ma non credo che nessuno dei cortesi lettori vorrebbe rassomigliare loro: sono gente di coltura nulla o quasi, che non possiede che la caratteristica di calcolare a memoria, quasi inconsciamente. Tutto il resto in loro è un sol «complesso d'inferiorità».

spose il savio. Chiunque abbia conoscenza anche superficiale dell'essenza di questa scienza che, radicata nelle cose dello spirito, si costruisce grado per grado, con la sola intelligenza, non può non approvare questa risposta del geometra greco. Da questo riconoscimento non ne deve derivare uno scoraggiamento disfattistico, poichè fra «la via reale» e la «direttissima» alle vette più eccelse, esistono, per la legge del trapasso continuo, per il principio di «continuità» infinite vie intermedie.

Scienziati benemeriti di grande valore, come Georg Scheffers, Silvanus P. Thompson, Gherardo Kowalewski, hanno perfettamente compreso la situazione ed hanno cercato di segnare queste «vie di mezzo». Le opere di iniziazione matematica di questi tre grandi maestri costituiscono un durevole e prezioso contributo alla nostra cultura.

Lungi da me la temeraria pretesa di voler gareggiare con la plastica meravigliosa di uno Scheffers o con la entusiasmante precisione ed eleganza di un Kowalewski oppure con la ricchezza di contenuto e col divino «humour» degli scritti di un Thompson. Tuttavia, e questo tuttavia ha la sua importanza, tutti e tre questi scrittori classici presumono qualcosa che non può esser trascurato quando si voglia combattere a fondo il nostro «complesso d'inferiorità» matematica. È indispensabile cioè una certa coltura elementare o per lo meno il saldo possesso della matematica elementare.

E quanto spesso facciano difetto appunto questi concetti elementari, fondamentali di matematica, nonostante tutto il gusto che naturalmente si avrebbe per essa e malgrado anche l'insegnamento medio ricevuto, lo sa per esperienza chi, come il sottoscritto, l'ha sentito in se stesso, quando ha voluto estendere la sua cultura ed ha frequentato il corso di matematica statistica tenuto dal Dipartimento Federale Austriaco.

Questa esperienza è stata per me anche la causa determinante del mio tentativo, che faccio con pieno, espresso

rispetto alla vera scienza. Poichè ho intuito che per tre ragioni necessarie dovevo compilare questo libro io stesso o farmelo fare da un condiscepolo come aiuto e guida; anzitutto uno studioso, sia esso medico, economista, commerciante, industriale, giornalista, naturalista ed anche ufficiale dell'esercito, funzionario, impiegato, operaio, studentessa o scolaro, può avere il desiderio di imparare a conoscere il mondo dei concetti dell'ostica matematica in modi diversi da quelli scolastici abituali, per appropriarsene le generalità e procurarsi l'intima soddisfazione di possederli. Può anche darsi che lo studioso voglia qualche cosa di più: sarà allora incoraggiato dopo la mia modesta iniziazione ad affidarsi alla guida di un Scheffers, di un Thompson o di un Kowalewsky per spingersi più avanti... fino a cadere nella trappola di cui sopra e a non più capire le mie chiacchiere o la mia ingenuità.

Siffatti lettori saranno il mio orgoglio, anche se poi, in seguito, dovessero disprezzarmi.

Finalmente può anche darsi che qualche studente si serva del mio scritto come di un mezzo illegale, come lo sono le traduzioni francesi interlineari dei testi greci. Per questo io chiedo scusa a tutti i pedagoghi e prego di non indirizzarmi nessuna protesta che io «guasto gli scolari». Io dichiaro a questi scolari, apoditticamente, che in caso di contraddizione non a me essi devono credere ma ai loro maestri.

E poichè ho parlato d'insegnanti, è per me gradito e inderogabile dovere di ringraziare qui il bravo matematico Dott. Walter Neugebauer che mi è stato maestro nel corso già sopra accennato, e che mi ha guidato fino nel cuore della matematica rendendomi cosciente della vera grandezza di questa scienza. Il poeta Novalis ha detto: «La matematica è la vita degli dei. Tutti gli inviati da Dio devono essere matematici. La matematica pura è religione. I matematici sono i soli felici. Il vero matematico è per se stesso un entusiasta. Senza entusiasmo niente matematica».

Godrei di poter trasmettere un siffatto spirito ad una quantità dei miei lettori; perchè purtroppo il «complesso di inferiorità matematica» come qualunque complesso del genere, fa nascere in noi dei sentimenti poco belli. La famosa matematica greca Ipazia, la sola donna dell'antichità che abbia acquistato fama in questa scienza, non è certamente stata lapidata dal popolo per solo fanatismo religioso.

Questo libro dovrebbe aiutare a combattere quell'orrore della più pura, direi quasi, più divina, di tutte le scienze. Quelli che superficialmente discorrono sempre di Spirito, considerano la matematica l'apice del materialismo. A questi sia ricordato che non solo per i sacerdoti indiani, babilonesi e egizii, religione e matematica erano affini. Anche Pitagora, Platone il Cusano, Galileo, Pascal, Newton, Leibnitz, per citare solo i massimi, ricavarono dalla matematica la coscienza che al limite, la «più sicura» di tutte le scienze, suscita la vera fede e la vera umiltà dinanzi al divino.

Avremo sovente, nel corso del nostro studio in comune, occasione di toccare di passata siffatti problemi.

Dirò ancora in breve delle divisioni nello svolgimento del mio libro. Per tutto quanto riguarda quella matematica che si è costruita colla collaborazione – nei secoli – di migliaia di autori, ho redatto da solo questo libro. Per buona pace dei lettori più critici, il matematico Dr. W. Neugebauer ne ha riveduto le bozze dandomi preziosi suggerimenti. Non ho voluto rendere questo specialista corresponsabile del mio scritto, tanto più che ho seguito, dal punto di vista didattico, i consigli e i metodi del matematico francese Pierre Boutroux.

Vivi ringraziamenti devo tributare anche al pittore Hans Strohofer che non ha creduto di screditarsi nell'eseguire, a mia istanza, tutte le figure del testo.

E poichè ho dovuto condurre a termine la mia impresa in momenti difficili e in un tempo assai limitato, ho da ringraziare il mio amico editore Paul Zolnay per il suo

generoso aiuto ed il mio amico e consigliere « in artibus » Sig. Direttore Felix Costa per il suo appoggio. La esecuzione coscienziosa del libro e la grande cura posta nel dargli un aspetto elegante e simpatico è anche un merito che potrebbe compensare l'eventuale errore della mia temporanea diserzione dal campo dell'arte pura.

E ora – e non c'è scampo, poichè non c'è via reale alla matematica – dobbiamo, il lettore ed io, metterci di buona voglia al lavoro, ad un lavoro assiduo per giungere dal « due più due quattro », fino all'integrale. Credo di averne offerto la possibilità di massima. I contraddittori mi diranno il resto.

Vienna, 8 settembre 1934.

EGMONT COLERUS

Capitolo I

LA « VERA CABALA »

Nell'anticamera di un medico, un paziente, prevedendo una lunga sosta, cerca di ammazzare il tempo d'attesa colla lettura. Sul tavolo giaciono ogni sorta di « prospetti » di case di cura, di linee di navigazione, di agenzie turistiche. Il suo sguardo annoiato viene attratto da un'illustrazione che gli rivela tutto lo splendore dei mari del Sud e delle città tropicali; incuriosito, sfoglia l'opuscolo ma lo ripone tosto, disilluso. Il prospetto che apparentemente vanta i pregi di una linea Sud-Americana di navigazione, è stampato... in portoghese, a quanto pare; egli neppure lo sa ma non ne capisce una sola parola. Ma, non trovando nulla di meglio, riprende l'opuscolo: le illustrazioni delle cabine, delle sale da pranzo dei piroscafi, le fotografie dei porti toccati, sono comprensibili: anzi c'è altro ancora che egli può capire senza tradurre: sono le lunghe colonne di cifre, le statistiche del movimento, i calcoli numerici sparsi qua e là a mo' di esempi: gli orari delle partenze, degli arrivi, le percorrenze...

Son persuaso che voi considerate questo mio esempio come infantilmente ovvio, magari puerile. Chi ha mai dubitato che ormai quasi tutte le nazioni civili adoperano le stesse cifre nei loro calcoli? Che c'è di strano o di problematico in questo? Peccato di aver cominciato in questo modo un capitolo: la cifra due nel testo portoghese significa la stessa cosa che in un testo tedesco o italiano ed il calcolo $5214 \times 7 = 36.498$ è parimente

indipendente dal paese in cui viene eseguito, e allora basta. Discorriamo d'altro.

Concedo volentieri che contro questa esemplificazione banale che vi adira, e contro al suo risultato, non ci sia nulla da eccepire.

Protesto esclusivamente per questo, che siffatti esempi escludano ogni ulteriore discussione. Anzi affermo persino che una illustrazione più dettagliata del nostro esempio « puerile » ci introdurrà direttamente nei meandri più reconditi della matematica e ci servirà da chiave per apprendere un gran numero dei più importanti concetti fondamentali di essa.

Il mio contraddittore ha però perso di vista qualche cosa. Anzitutto quando un tedesco o un portoghese legge le cifre del prospetto, queste rappresentano per entrambi una identica cosa; ma il portoghese si serve di parole diverse da quelle usate dal tedesco per leggere le stesse cifre; un italiano, un inglese, uno svedese ne useranno altre ancora. L'enunciazione delle cifre penetra nei misteri dei sistemi della nomenclatura. Noi diciamo, per 24, ventiquattro, il tedesco dice vier und zwanzig (quattro e venti); per 80 il francese non dice octante o huitante che sarebbe una logica continuazione di soixante, ma ci sbalordisce con una costruzione moltiplicativa: « quatre vingt », come sarebbe a dire quattro volte venti.

Prima di penetrare in questi misteri, vorrei avvertirvi del grande pericolo a cui si va incontro nel parlare di cifre a gruppi: in italiano si va sicuri, ma quando il francese vi parla di « onze cent » o il tedesco di « elfhundert » attenti! Vi si detta la cifra 12.100? Il francese potrebbe dire onze mille onze cent e direbbe giusto, ma questo costringe l'uditore a sommare undicimila con mille cento. Che complicazioni!

Stabiliamo dunque come primo risultato che la nostra notazione internazionale per cifre, ha una relazione assai

indiretta con la scrittura per lettere alfabetiche, ed anzi tutto è basata su fondamenti affatto diversi. La notazione per cifre è di per sè una pura scrittura concettuale, mentre le lettere non sono simboli di concetti – come la scrittura chinese – ma simboli di suoni, i quali diventano, nei vocaboli, simboli di concetti. Il concetto *4*, espresso in cifre, richiede un segno solo: espresso in lettere ne richiede sette in italiano e quattro in tedesco.

Ma questo non è che il principio della nostra discussione; siamo appena giunti alla pietraia di accesso della nostra ascensione della Dolomite matematica. Abbiamo parlato finora di cifre e di numeri, ma non ancora della struttura meravigliosa della montagna, e che si chiama il sistema numerico, vanto e gloria dell'ingegno umano.

Il mio contraddittore mi oppone una « mozione d'ordine »: se col tuo sistema numerico tu intendi farci una lezione che ogni bambino delle elementari ha già, volente o nolente, dovuto imparare, e parlarci del sistema decimale, beh, lasciaci in pace, per piacere! Conosciamo la cosa, l'adoperiamo ogni giorno e non abbiamo la minima intenzione di confortare col nostro interessamento la tua mania di scrivere. Se poi tu volessi intrattenerci della teoria dei numeri e delle ricerche di Gauss, di Dirichlet, di Enriquez ed altri grandi scienziati, bada che noi chiuderemo il tuo libro fin da questo punto e lo rimanderemo al libraio. Tu non hai in questo caso mantenuta la promessa di limitarti a ciò che è veramente necessario, senza tante premesse.

« Benissimo, caro contraddittore – dovrei rispondere – tu non hai pensato che la mia discussione sui misteri del sistema numerico non è affatto scopo a sè stessa. Non mi viene neppure lontanamente per il capo d'insegnare la teoria dei numeri, e tanto meno di spiegarti semplicemente perchè duemilacinquecento quattordici si scrive 2514. O meglio, non mi accontenterò di questa spiegazione. E dappoichè non voglio fare premesse, io devo

pur riferirmi a qualcosa di noto, per rendere comprensibili, fin dal primo capitolo, dei concetti molto elevati di matematica.

Ma tronchiamo il dialogo e proseguiamo nelle ricerche che l'hanno occasionato ».

Incominciamo col citare uno dei più grandi uomini che la storia dello spirito umano ricordi: Goffredo Guglielmo *Leibnitz* (1646-1716) l'onnisapiente. Leibnitz, come è noto, fu anche uno dei grandi matematici, il pioniere dell'analisi infinitesimale o calcolo infinitesimale, appartenente alla matematica superiore.

Ebbene Leibnitz ha chiamato, in latino si capisce, « Kabbala vera » la sua teoria generale dei simboli, o in parole povere dei « segni gravi di significato » (1).

Che cosa significhi cabala, cabalistico, lo dovreste sapere, lettori miei; non evoca questo in voi: magia, incantesimi, formole di scongiuri, forze misteriose suscitate da formule o simboli?

Ora i segni matematici sono appunto gli elementi di quel calcolo per simboli del Leibnitz che fan parte della teoria generale dei simboli.

Mi rendo perfettamente conto che questo primo mio accenno ai voli d'ingegno di un Leibnitz non sia senz'altro comprensibile. Cerchiamo di semplificare le espressioni di Leibnitz pur ritenendo per fermo che nella notazione matematica si nasconde una specie di arte magica, una « vera cabala ».

Riguardo a questa idea possiamo ancora fare una breve scorribanda nella storia delle matematiche, o meglio nella storia del calcolo numerico, la quale ci chiarirà tante cosette.

L'egregio nostro contraddittore aveva torto, quando parlava con tanto disprezzo del nostro comune sistema

(1) I simboli presso gli antichi greci erano degli ossicini che si davano agli amici ed ospiti come segno di riconoscimento. Quei pezzi d'osso significavano che i portatori si conoscevano.

decimale. Non è forse uno dei suoi maggiori, ineffabili meriti quello di poter essere appreso da uno scolaretto delle elementari? Attraverso alla storia la cosa ci appare ben diversa; quel che oggi costituisce il compito del buon Pierino, fu per molti secoli addietro l'enigma rompicapo dei più grandi matematici e perchè? Perchè mancava loro in quei tempi la macchinetta automatica del sistema dei numeri, la vera cabala, la calcolatrice di una esatta scrittura dei numeri. E qui mi si permetta anzitutto una piccola digressione. Ho parlato di scrittura esatta e con ciò mi riferivo al sistema nel suo insieme.

Ma a parte questo significato elevato della parola, io vorrei rendervi attenti a questo fatto, che anche chi conosce tutti i segni magici della matematica, può servirsene facilmente e con sicurezza solo se segue due regole apparentemente banali. Anzitutto egli deve scriverli chiari e precisi e non a casaccio, non mescolandoli gli uni agli altri, scribacchiandoli in margine o frammezzo ad altri calcoli. In secondo luogo il principiante – e questo studio elementare giunge assai, assai alto nella nostra disciplina – non deve cercare di « bruciare le tappe », di saltare i passaggi intermedi, per impazienza, anche se sa calcolare di testa. Ci siamo affidati alla « cabala » e tutti i suoi segni vanno scritti. Se poi qualcuno attribuisce importanza al calcolo mentale, come esercizio o controllo della propria capacità rappresentativa, provi ad eseguire prima di addormentarsi siffatti calcoli mentali, ne noti i risultati, e al mattino appresso li controlli per iscritto e passo passo mediante la « vera cabala ». È questo un consiglio quasi di allenamento sportivo, per acquistare, fase per fase, destrezza nell'esercizio del calcolo. Come per la boxe, per la scherma, per lo sci, lo « stile » personale si sviluppa da sè come adattamento alle forme normali.

Ma può anche svilupparsi la superficialità e la sciatteria.

Torniamo in carreggiata: dicevo che quel calcolo numerico che ora sembra così evidente, non è stato sempre una cosa così facile a comprendersi. È solo dal XII° secolo d. C. che la « vera cabala » è diventata patrimonio comune dei popoli occidentali. A dirla in breve, a quel tempo due scuole si contendevano il campo; la scuola degli « abacisti » e quella degli « algoritmici ». L'abbaco è l'*abacus*, la tavoletta per calcolare dei romani, il *suan-pan* dei cinesi, che l'usarono dai tempi più remoti e sulla quale i cinesi d'oggi eseguiscono ancora con gran destrezza i loro calcoli. *Calculi* erano detti dai romani quei sassolini che servivano loro per i conteggi: il nostro pallottoliere ne è il moderno ricordo. La nostra fig. 1 rappresenta un abbaco romano trovato negli scavi di Pompei: ogni colonna, da destra a sinistra, rappresenta unità, decine, centinaia, migliaia e così via. La tavoletta è divisa da una linea orizzontale: su di essa è indicato il numero 6 4 7 3 5 0 1 2 scritto in corrispondenza della linea orizzontale anzidetta. Non lo vedete? Ebbene aspettate, ve lo spiego subito: i calcoli neri rappresentano ciascuna unità e sono in numero di quattro per ogni colonna: i calcoli bianchi, uno per colonna, rappresentano la *cinquina* (cioè il numero cinque – non quella del soldato). Abbassate sulla linea tante unità e alzate eventualmente verso di esse un calcolo bianco quando il numero supera o è uguale a 5 e formerete così il numero.

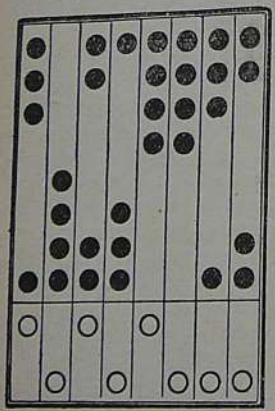


Fig. 1

Ingegnoso, vero? Quando si dice, quei Romani! Per loro due e due fan sempre quattro.

Trionfò, su questi giochetti degli abacisti, l'altra scuola, degli algoritmici, che introdusse la « vera cabala ».

Gli algoritmici si chiamavano così dal matematico arabo Ibu Musa Alchwarizmi oriundo da Khorassan e che viveva a Bagdad. Attorno all'800 d. C. scrisse, tra l'altro, un libro sui fondamenti del calcolo con cifre indiche (da noi chiamate arabiche) impiegando il sistema decimale. Leonardo Pisano che aveva accompagnato suo padre a Bugia in Algeria, apprese dagli arabi metodi perfezionati. « Modus indorum » li chiama. E ne informò i pisani in un suo libro manoscritto che vide la luce attorno al 1200 e che comincia: « I nove segni degli indiani sono:

9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

con questi nove e col segno 0 che gli arabi chiamano « zephirum » (zero) si può scrivere qualunque numero ». Importante nel nuovo sistema il valore che si dava alla posizione o all'ordine delle cifre scritte.

Il primo passo verso la vera cabala era fatto. Immaginatevi la meraviglia dei calcolatori colla tavoletta nel veder eseguire moltiplicazioni come 85243×9621 con un semplice gessetto su di un tavolo, senza portarsi dietro l'abbaco!

Agli operatori che vedevano seguire i loro calcoli – non più di sassolini – dagli astanti meravigliati, pareva di toccare il cielo col dito.

Ma siamo costretti a staccarci da questi ricordi storici per ritornare a più severi e frigidi argomenti. Abbiamo tuttavia chiarito il significato di quella parola algoritmo che ci allarmava; essa non vuol dire altro che notazione e calcolo mediante particolari simboli matematici. E ciò entro un sistema chiuso, che eseguisce per noi automaticamente una parte del lavoro mentale

di calcolo, ordinando le cifre in certi dati modi; e ci rende accessibili certi campi in cui la nostra facoltà di rappresentazione potrebbe non arrivare facilmente, o, peggio, potrebbe perdersi.

Vediamo un po' più da vicino le ragioni della forza magica di quello speciale algoritmo che noi chiamiamo sistema decimale.

Capitolo II

IL SISTEMA DECIMALE

Qui ci troviamo anzitutto di fronte alla straordinaria semplicità del sistema. Tutto il materiale che ci occorre si riduce a dieci cifre; se a queste aggiungiamo un paio di simboli di collegamento, come i segni + e —, o × e :, e finalmente il segno di eguaglianza, possiamo già dominare da esperti algoritmici tutto un mondo di calcoli numerici. Alla nostra arte algoritmica va ad ogni modo fatta una importante premessa, che ci appare naturale ma che costituisce precisamente la chiave dei segreti: dobbiamo conoscere il valore della posizione delle cifre stesse.

Per dare un esempio tipico di una scrittura che lo ignori, tireremo in ballo le così dette cifre romane. Un abacista di Roma antica deve eseguire anche solo la somma dei numeri M D C C C X L I X e M M C X X I V. Egli si trova anzitutto imbarazzato nell'ordinamento delle diecine, unità, centinaia, per poterle disporre sulla sua tavoletta e dovrà ammettere che in sostanza egli non possiede nessun algoritmo sicuro. L'algoritmico « more indico », non si cura neppure di scrivere questi numeri 1849 e 2124 uno sotto l'altro. In pochi secondi

ci annunzia il risultato della sua operazione nel numero somma: 3973.

Ma attacchiamo il problema direttamente: per sistema ordinale o del valore della posizione delle cifre, intendiamo un modo particolare di scriverle, il quale attribuisce a ciascun segno, fosse pur solo una virgola, un valore diverso a seconda del posto in cui si mette la cifra o il segno, anche quando si tratti di uno stesso numero. E poichè il sistema procede in ordine decrescente di grandezza da sinistra verso destra, un 3 scritto all'ultimo posto ha valore diverso da un 3 scritto al penultimo e all'antepenultimo. Lasciamo per ora stare le cosiddette frazioni decimali determinate dal solo spostamento di una virgola. Trattiamo dei soli numeri interi, memori del detto del matematico Kronecker, che: « i numeri interi sono stati dati da Dio e tutto il resto non è che opera dell'uomo ».

Dall'esempio che abbiamo dato del 3, vediamo che il suo valore decuplica per ogni spostamento della sua posizione verso sinistra. Al primo posto vale 3 unità, al posto immediatamente a sinistra ne vale trenta: di qui il nome di sistema decadico o decimale: base del quale è il dieci.

Quantunque stiamo facendo passi da gigante, per semplificare le cose che dovremo dire fra poco, introduciamo qui un nuovo concetto: quello di *potenza*. Non si tratta poi d'altro che della moltiplicazione di un numero per sè stesso, per la quale operazione si usa un segno particolare. Non ci dilungheremo per il momento sull'operazione di elevazione a potenza, ma vogliamo solo mostrare con qualche esempio come la si rappresenta. Dieci moltiplicato per dieci, cioè preso due volte come fattore, è il dieci alla seconda potenza e si scrive 10^2; dieci preso come fattore tre volte si dice dieci alla terza potenza e si scrive $10^3 = 10 \times 10 \times 10$ e così $10^5 = 10 \times 10 \times \times 10 \times 10 \times 10$. Il piccolo numero messo in alto a

destra come segno della potenza è – come tutti sanno – l'« *esponente* » della potenza stessa, e ne esprime l'ordine di grandezza. La prima potenza del 10 si dovrebbe scrivere 10^1 ma si omette l'esponente. Non basta: dobbiamo considerare anche l'esponente zero, la potenza nulla 10^0. Che sciocchezza! 10^1 è un numero elevato a 1; un numero *non* moltiplicato per sè stesso, o meglio preso come fattore una volta sola, passi; ma che significato può avere un numero preso *zero volte* come fattore!

Pazienza, lettore; lo vedremo più tardi, quando parleremo dei logaritmi; per ora accontentati di ricordare che 10^0 viene considerato uguale all'unità.

Riassumendo ci troviamo a considerare la serie delle potenze:

$$10^0 = 1;\ 10^1 = 10;\ 10^2 = 10 \times 10 = 100;$$
$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000 \text{ e così via.}$$

La tua perspicacia, lettore, avrà già notato subito che l'esponente $0, 1, 2, 3, \ldots$ rappresenta anche il numero di zeri che seguono l'unità.

E ora che siamo equipaggiati per la esplorazione del nostro algoritmo, sacco in spalla e march! Esaminando l'abbaco trovato a Pompei, avevamo visto che un numero qualunque scritto sulla tavoletta è composto di un certo numero di unità, diecine, centinaia ecc. a seconda della colonna in cui si spostavano i « calcoli ». Cerchiamo di esprimere quest'ordine senza portarci dietro l'ingombrante tavoletta ed usando le cifre arabiche: da quel che si è detto sopra, non sarà difficile. Basta scrivere la serie delle potenze crescenti del 10. Olà, prego, non vi spaventate, il termine « Serie » in matematica ha un aspetto assai arcigno. Avete mai aperto un libro del nostro Lagrange? Sarete stati spaventati dalle sue « misteriose » Serie. Le quali però hanno, con l'Analisi, aperto la via a singolari semplificazioni in matematica; anche in quella pratica, adoperata dagli ingegneri e dai contabili.

Intanto ecco subito un esempio per tranquillizzare il lettore e mostrargli il procedimento: supponiamo di dover sviluppare in serie delle potenze del 10, il numero 1.483.706. Le conoscenze fin qui acquistate ci permettono di farlo; così scriveremo $1.483.706 = 6 \times 10^0 + 0 \times 10^1 + 7 \times 10^2 + 3 \times 10^3 + 8 \times 10^4 + 4 \times 10^5 + 1 \times 10^6$. Notiamo qui subito che ogni numero moltiplicato per zero dà zero e per converso ogni zero del numero può considerarsi come il prodotto di un numero qualunque per zero. Ci serviremo di questa proposizione inversa per estendere la serie in relazione alla posizione degli zeri. Una semplificazione di scrittura potrà consistere nel sostituire al segno $\times$ di moltiplicazione, un semplice punto a metà altezza $7 \times 10^2 = 7 \cdot 10^2$, per non confonderlo col punto in basso che serve a dividere gruppi di cifre (per migliaia).

Stabilita così la serie con le potenze crescenti del 10, passiamo alla « discussione » della medesima. A rischio di annoiare il mio paziente lettore, non voglio lasciar fare a lui questa discussione; potrebbe evitarla, per pigrizia o perchè ritiene di poterne fare a meno.

Osserviamo anzitutto che la successione degli ordini di grandezza è strettamente rispettata; le potenze si seguono ordinatamente, da 10^0, che rappresenta l'unità, al 10^6 che sta a rappresentare i milioni. Le cifre premesse alle potenze del 10 possono chiamarsi i « coefficienti » della serie. Notiamo poi che questi coefficienti, qualunque essi siano, non modificano per nulla l'ordine della serie, poichè sarà sempre 6.10^0 cioè 6×1 minore di 0×10^1 cioè dello zero che lo precede, perchè questo zero appartiene ad un ordine superiore, quello delle potenze 10^1, cioè alle diecine. La presenza di uno zero ci fa anche supporre esserci un numero reale prima di esso come coefficiente di ordine superiore (delle centinaia) perchè un numero non può cominciare con lo zero.

È poi chiaro che una serie siffatta può estendersi teo-

ricamente fino all'infinito. Questo vuol dire che non c'è numero, per grande che sia, che non possa mettersi sotto forma di una serie delle potenze crescenti del 10, come quella che abbiamo testè scritta. Naturalmente è vera anche la proposizione reciproca: una serie siffatta può esprimersi con un semplice numero intero nel sistema decimale. Per esempio la serie:

$$5 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^5$$

non è altro che il numero intero 398.075, vale a dire – pazienza, lettore – in parole: 5 unità, 7 decine, 0 centinaia, 8 migliaia, 9 decine di migliaia, 3 centinaia di migliaia.

Notiamo qui anzitutto che un sistema perfetto di notazione per cifre presume che noi possiamo esprimere ogni ordine di grandezza (ogni potenza del 10) con un vocabolo proprio (decine, centinaia, migliaia). A rigore questo non avviene col sistema decimale che per i primi tre ordini, al di là dobbiamo formarci dei vocaboli composti dai precedenti (diecine di migliaia, centinaia di migliaia) poi viene il milione. Ai tempi di Marco Polo questo era l'apice delle grandezze numeriche – perciò si diede il nome di Milione alla sua relazione di viaggi per esprimere le incommensurabili ricchezze di cui parlò. Poi vengono le diecine e centinaia di milioni – parole composite –. Poi il miliardo, migliaia di milioni ($10^9 = 10^{3+6}$) che era l'apice della ricchezza già solo al secolo scorso. Poi vengono le decine e le centinaia di migliaia di milioni (vocaboli compositi). Poi il bilione, cioè il milione di milioni o, se volete, il milione al quadrato $(1.000.000)^2$ o più semplicemente $(10^6)^2$ o $10^{6\times 2}$.

Siamo giunti alle cosiddette cifre astronomiche, ma possiamo proseguire perchè Einstein ci dice che i limiti del nostro universo si trovano all'estremità di un diametro che espresso in metri, si scriverebbe con 10 elevato alla potenza 27ma:

$10^{27} = 10^{3+6+6+6+6}$ tremila quattrilioni.

Ti avverto, lettore cortese, che devi fare attenzione nel maneggiare queste grosse cifre perchè qui il nostro vocabolario s'imbroglia. Chi dice in un modo, chi in un altro. Al di là del trilione noi europei non siamo più d'accordo: anche in questo? mi dirai! – Il trilione dei francesi è chiamato « biliardo » dai tedeschi; che dicono trilione quello che i francesi chiamano quattrilione. È che questi, e con loro anche noi in Italia, passano subito dal bilione, al trilione (migliaia di bilioni) al quattrilione (milione di trilioni) mentre i tedeschi, più sistematici, hanno chiamato trilione la terza potenza del milione $(1.000.000)^3 = (10^6)^3$ e quattrilione la quarta potenza del milione $(10^6)^4$ essendo il bilione la seconda potenza del milione $(10^6)^2$. Il migliaio di trilioni si chiamerà triliardo.

Ma tu mostri già dei segni d'impazienza, povero lettore, e smetto.

Respiriamo: siamo giunti ormai ad un punto della nostra ascensione che ci permette di gettare uno sguardo sulle valli che si diramano ai nostri piedi, ma se guardiamo in su ci accorgiamo che la cima è ancora lontana. Se tanto mi dà tanto, che cosa vedremo di lassù?

E mentre sostiamo, qualcuno della cordata brontola, l'amico che sa il francese ripete: « quatre vingt? c'è qualcosa che stride nel vocabolario del sistema decimale ». E « Bastiano il contrario » salta su: « perchè proprio si è scelto il 10 come base del sistema decimale »? « Sarà – risponde il dottor X – perchè possediamo dieci dita ed i nostri primi progenitori s'erano abituati a computare sulle dita! ».

Lo storico e archeologo della cordata ci rammenta che sono stati adoperati dei sistemi sessagesimali, binari, quinari di numerazione e ci mostra come oggi ancora, in certi paesi, si usa il sistema dodecimale. Leibnitz in un suo viaggio a Roma nel 1690 aveva scovato fra vecchie carte il più straordinario di tutti i sistemi: il sistema

di aritmetica binaria o diadica che fa uso unicamente delle cifre 0 ed 1. Il francese quatre vingt è forse un ricordo di qualche sistema vigintinale (di quando si facevano i computi sulle dita delle mani e dei piedi!). Ma bando alle chiacchiere. Riprendiamo l'ascensione.

Teniamo solo presente che il sistema decimale, dal punto di vista teorico, non ha nulla che faccia preferire la base 10 ad un'altra qualunque. Ma in pratica la cosa è diversa.

Capitolo III

SIMBOLI E COMANDI

Dopo di aver dato un ultimo sguardo attorno, inoltriamoci in uno dei canaloni che si aprono davanti a noi e penetriamo nella conca delle meraviglie delle grandezze e delle forme. Noi afferriamo, incoraggiati, uno dei molti dubbi sui quali cominciavamo a sollevare questioni. Non è forse più che incomprensibile – ci chiediamo – che noi possiamo essere in grado con un qualsiasi sistema di numerazione e con un numero assai limitato di segni o di cifre, di costruire via via tutto l'edifizio dei numeri naturali fino all'infinito? La scoperta di Leibnitz ci ha incoraggiato a credere a questa possibilità, anche quando non possedessimo altro che lo zero e l'unità.

D'ora innanzi noi ci muoveremo quasi esclusivamente nel campo del sistema decimale che ci è stato affidato fin dall'infanzia. Tuttavia per non smarrire la retta via, io scriverò fin dall'inizio del nostro cammino, su una qualunque lavagna, il magico segno 3! Che cosa significa questa cifra col punto esclamativo che ci appare quasi come un comando secco? E che cosa ci viene comandato? Dovrei io ricominciare con una cifra sola;

devo forse tagliarla in due, rimpicciolirla, ingrandirla, farla variare? Mi trovo forse fra i cannibali, dinanzi ad un selvaggio che lancia un grido inarticolato e minaccioso? Un po' di pazienza, lettore mio cortese. Io volevo due cose col mio segno magico: anzitutto approfondire il nostro sguardo nelle più intime particolarità delle forme matematiche, poi preparare, fin dall'inizio, la chiave magica che ci permetta di sciogliere e dominare tutti i problemi che ci tormentano – purtroppo solo nel campo matematico!

Naturalmente quel certo comando: 3! può applicarsi ad una cifra qualunque e tanto vale 3! in questo rispetto quanto 5! o 25! o che so io: 102077! Il comando è sempre eguale.

Prima però di considerare questo particolare comando simboleggiato dal punto esclamativo, consideriamo in generale i modi e gli scopi dei comandi in matematica. Noi abbiamo già fin qui eseguito docilmente e senza accorgercene, un certo numero di comandi matematici, perchè ne abbiamo preso l'abitudine fin dalle scuole elementari. Abbiamo già assodato che le singole cifre ed i numeri con esse composti sono rappresentazioni o segni, o come anche si dice, simboli, per determinati concetti di pluralità. Abbiamo poi discorso di un sistema e di un metodo di calcolo con questi segni, cioè dell'algoritmo. C'è dell'altro: il « comando ». La scrittura e la comprensione da parte di tutti noi di sifatti comandi ci pone in grado di mettere in gioco il sistema di cifre e l'algoritmo. Chiamando « operazione » i diversi modi di calcolare, si può parlare di comandi di operazioni sui simboli anzidetti. Questi comandi li chiameremo « operatori » che è l'espressione tecnica data loro dai matematici. Noi conserveremo il termine più pedestre di « comandi » intendendo con essi, naturalmente, un comando di natura matematica, un ordine di eseguire una determinata operazione aritmetica, algebrica, in genere, matematica.

E come riesce assai difficile, in principio, alle reclute nelle caserme o in piazza d'armi, di eseguire su di un comando breve e secco, tutta una serie di operazioni complicate col moschetto, così è naturale che noi, reclute novelline della matematica, non possiamo subito comprendere ed eseguire con precisione le operazioni, comandate o indicate da quei segni cabalistici come $\times$: $\int$, che sono i comandi od operatori matematici.

Occorre anche qui attenzione e disciplina che costituiscono i nove decimi della preparazione matematica.

Incominciamo intanto dai comandi più semplici, corrispondenti al comando di « attenti » o « saluto » che le reclute imparano in piazza d'armi.

Il mio onorevole contraddittore frigge nel sentirmi usare questo linguaggio, e vorrebbe coprire il mio dire con un fiume di parole o ... di improperi. Ma tirerò diritto: ho intenzione di rendergli il segno $\int$ e il concetto d'integrale altrettanto chiaro ed evidente che l'operatore $+$ dell'addizione, e questo mio proposito non si può attuare in nessun altro modo da quello da me adottato. Il segno $+$ è un comando, così è il segno $\int$ d'integrale, un tantino più complesso del segno di somma ma, in sostanza, per nulla diverso.

Il mio contraddittore tende l'orecchio e teme che io voglia fin d'ora parlare di integrali! Ma non mi confondo: per il momento non varcherò i limiti dell'addizione, almeno per quel che ne concerne le difficoltà.

Assodiamo anzitutto che l'addizione è un comando: $5 + 4 = 9$. Che cosa vuol dire ciò? Vuol dire: « prendete cinque unità, aggiungetene altre quattro » – pausa. – Il paziente eseguisce. Allora? Scrivete ora un simbolo, il segno $=$ di eguaglianza. Il quale non vuol dir altro che: « Pronti: ho eseguito il comando ». E ora? A comando eseguito figura a destra del segno un nuovo simbolo, il nove. « Bene, andate pure ». – Se questa esemplificazione da caserma vi dà sui nervi lasciamo stare, e parliamo in

modo più astratto. Anche la sottrazione è un comando analogo e così la divisione e la moltiplicazione. Questi operatori si scrivono, se non erro: —, :, ×. E ciascuno sa che questi concisi comandi possono portare ad operazioni lunghe e tediose. E così anche l'elevazione a potenza. Per calcolare la quantità d'acqua che passa in un tubo, l'ingegnere deve calcolare d^5: la quinta potenza del diametro d del medesimo!

Ma torniamo al misterioso 3! di cui dicevo in principio: che cosa rappresenta nel linguaggio dei comandi matematici? Il lettore che ha fatto l'istituto tecnico suggerisce: *fattoriale* di 3. Ed è così, ma che cosa vuol dire, che operazione comanda? Vuol dire in generale: prendi l'uno, moltiplicalo per due, moltiplica ancora il prodotto per tre, il prodotto ancora per quattro, il prodotto per cinque e così via. L'ultimo fattore è quello che trovi scritto davanti al segno esclamativo. Eseguiamo per esempio per i primi sedici numeri interi.

1!=1=	1
2!=1·2=	2
3!=1·2·3=	6
4!=1·2·3·4=	24
5!=1·2.3·4·5=	120
6!=1·2·3·4·5·6=	720
7!=1·2·3·4·5·6·7=	5.040
8!=1·2·3·4·5·6·7·8=	40.320
9!=1·2·3·4·5·6·7·8·9=	362.880
10!=1·2·3·4·5·6·7·8·9·10=	3.628·800
11!=1·2·3·4·5·6·7·8·9·10·11=	39.916.800
12!=1·2·3·4·5·6·7·8·9·10·11·12=	479.001.600
13!=1·2·3·4·5·6·7·8·9·10·11·12·13=	6.227.020.800
14!=1·2·3·4·5·6·7·8·9·10·11·12·13·14=	87.178.291.200
15!=1·2·3.4·5·6·7·8·9·10·11·12·13·14·15=	1,,307.674.368.000
16!=1·2·3·4·5·6·7·8·9·10·11·12·13·14·15·16=	20,,922.789,888.000

Come si vede, il comando espresso dal punto esclamativo che segue una cifra, porta facilmente a conseguenze enormi.

Il fattoriale della serie di numeri interi incomincia modestamente ma cresce poi in modo prodigioso. Non entriamo in particolari: ma già a prima vista la nostra tabellina qui sopra ce ne fa avvertiti; la serie dei fattoriali

ha una certa rassomiglianza con la serie delle potenze successive. La differenza sta in questo che nelle potenze il fattore rimane sempre lo stesso, mentre nel fattoriale, il moltiplicatore cresce costantemente di una unità.

Ricordate la favola: Il re indiano Shehram aveva chiesto a Sessa Ebu Daher l'inventore del gioco degli scacchi, quale premio desiderasse per la sua bellissima trovata. «O gran re», dice lui con faccia fresca, «mi basta essere premiato con granelli di frumento; dammene quanti risulterebbero nell'ultimo quadratino della scacchiera quando nel primo tu mettessi un granello, nel secondo il doppio – due granelli – nel terzo il doppio di due granelli, nel quarto il doppio e così via, in ogni quadratino successivo, il doppio dei granelli esistenti sui precedenti. «Scoppia sua maestà in una sonora risata e dà subito l'ordine di accontentare il modesto inventore. Ma quando il suo intendente viene a riferirgli che non bastano tutti i sacchi del reame per contenere il modesto premio, nè tutti i cammelli per trasportarli, egli non vuol credere. Poi siccome conosceva il calcolo con cifre indiche, prende lo stilo ed eseguisce l'operazione: scrive cioè 1.2.2.2.2... per 64 fattori – quanti sono i quadratini della scacchiera. – Passa un giorno e passa l'altro e le cifre si aggiungono alle cifre. Nelle fiabe, il tempo non conta... Finalmente trova il risultato:

9.223. 372. 036. 854. 775. 808 granelli.

Noi che conosciamo le potenze lo scriveremo brevemente 2^{63} (ma questo non è che il comando di elevare a potenza il due: provatevi a eseguirlo !).

Per farla breve, l'ultimo quadretto della scacchiera avrebbe dovuto avere 7.48 chilometri di lato per portare un cubo di granelli del numero scritto sopra, se si ammette che ogni misura da un litro ne contenga in media 22 mila. Non basta: vediamo quanti cammelli occorrono per portar via questo ben di Dio. La nostra esperienza

logistica africana ci ha insegnato che un cammello si può caricare in media 140 kg. e che in carovana di cammelli, ogni animale cammina a distanza di cinque metri dall'altro. Mille litri, cioè un metro cubo, consta di 22 milioni di granelli e pesa 7 quintali (il carico di cinque cammelli). La carovana consterà di più di 2 bilioni di bestie e sarà lunga 11,5 miliardi di chilometri! Se la favola è dell'anno 600 prima dell'era volgare, tutti i raccolti della terra sommati assieme fino a questo giorno, non bastano ancora a completare il carico.

Lasciamo dunque che i fati si compiano e torniamo ai nostri computi.

Capitolo IV

COMBINAZIONI

Dopo questa nostra diversione sulla facoltà di sviluppo che hanno alcuni comandi matematici, apparentemente innocui, vediamo d'indagare in quali casi si calcoli col fattoriale. Esso appartiene ad un ramo dell'Algoritmo dell'analisi combinatoria o, in parole povere, dell'arte delle combinazioni.

Non mi passa neppure lontanamente per il capo di premettere un elenco di definizioni e di assiomi come sarebbe corretto di fare a rigore di matematica. Siamo reclute, un po' selvatiche e facciamo scoperte di tutto ciò che ci interessa, ma un po' a caso, per esperienza.

Allo sguardo obliquo e scandalizzato che mi lancia il mio contraddittore, rispondo subito che concedo di dichiarargli seriamente, che questo non vorrà mai dire che la matematica sia una scienza sperimentale. La matematica, per dirla « grosso modo », ha origine esclusivamente dalla nostra mente, può costruirsi senza nessuna esperienza e i suoi risultati non possono venire nè con-

fermati nè contraddetti dall'esperienza, ma unicamente dalla correttezza logica delle sue operazioni. Questo, solo di passata, per il lettore di tendenze filosofiche, che qui può prendere nota delle espressioni « a priori, a priori-stico ».

Mettiamoci al lavoro, senza più dar retta al nostro contraddittore, e, col materiale che conosciamo, chiediamo per la terza volta, come sia possibile di mettere assieme tutti i numeri dell'universo, con i dieci segni del sistema decimale.

Chiunque osservi i numeri 123, 132, 213, 231, 312, 321, ed abbia un tantino di senso di orientamento sul significato delle parole, dirà che questi diversi numeri si « combinano » colle tre cifre che li compongono. Giustissimo ! tutti i numeri nel sistema che stiamo discutendo sono creati per « combinazione ». Spostiamo le cifre, formiamo i numeri per mezzo di scambi di cifre e diamo, ciò facendo, ad ogni numero un aspetto nuovo. Qui non si parla di posizione delle cifre: ci interessa unicamente la possibilità di distinguere la forma esteriore delle rappresentazioni numeriche, se posso così esprimermi. Se ci rifletto bene, io vo scoprendo grandi differenze nel modo in cui io vo combinando. Per i numeri inferiori alle dieci cifre, di queste dieci io ne adopero solo al più una, due, tre, e così via dicendo, fino a nove per ogni gruppo. Posso è vero scrivere, come in 1111 o 1212 oppure 1112, più volte di seguito la stessa cifra. Nei numeri di dieci cifre posso adoperare tutte quante le dieci diverse cifre, poi scambiarle fra di loro come in 1234567890 e 1346725809 e così via: vi sono poi numeri di dieci cifre in cui una cifra appare più volte come in 1.000.000.000 o 2.322.234.77 In numeri di più di dieci cifre necessariamente qualcuna è ripetuta.

Abbiamo cacciato la mano in un vespaio e penso che il nostro primo passo ci abbia più confusi che chiariti ! Come si può fare rientrare in un algoritmo questo caos

di numeri che si svolge fino all'infinito? A che cosa servono qui tutti i « comandi » quando incomincia a girarci la testa? Qui non c'è da fare un esperimento. Con le espressioni di un certo numero di cifre, noi giungiamo ad un numero tale di possibilità che, anche combinando, incessantemente, giorno e notte, non potremmo esaurire il calcolo che in un tempo poco minore dell'età della nostra terra, di cui non si sa nulla di ben preciso – come per le donne – se mezzo miliardo d'anni o qualche milione di più o di meno. Il nostro primo algoritmo (il sistema delle cifre) è un apprendista meraviglioso e vedremo come sappia trarsi d'impiccio.

La « vera cabala » non si può domare che con la cabala. Le parole ed i simboli magici non si possono neutralizzare che con altre parole o simboli magici. Così li renderemo inoffensivi. E noi cominciamo col combinare l'analisi combinatoria, cacciando un diavolo con un altro. E per non perdere contatto con la realtà, metteremo sotto forma di esempi la combinazione delle combinazioni. Alla fine verificheremo se abbiamo esaurito tutte le possibilità e costruiremo contemporaneamente un sistema di analisi combinatoria che stia in piedi e basti a se stesso.

Capitolo V

PERMUTAZIONI

Una onesta famiglia composta dei genitori e di dodici figlioli sta raccolta pacificamente attorno al desco quotidiano. D'un tratto uno dei ragazzi reclama e protesta perchè, per il suo posto a tavola, sfavorevole rispetto agli altri, riceve sempre i resti delle portate. La famiglia è paziente e sa evitare i contrasti con dei compromessi: si decide di cambiare ogni giorno i posti attorno alla

tavola, poichè non si potrebbe andare contro alle inveterate abitudini della fantesca nel servire. S'accende allora una discussione generale e si cerca di stimare quanto tempo occorrerà per esaurire tutti i possibili cambiamenti. « Oh, al più pochi giorni », dice il più piccolino. « Diciamo piuttosto qualche settimana » interrompe una ragazza più riflessiva. Si finisce però per convenire che ci vorrà almeno un anno. « Ma c'è la formola », aggiunge il figlio maggiore. « Tu credi proprio che si possa trattare il caso nostro con la matematica? » insinua il padre. Il figlio riflette per un po', poi: « dappoichè si tratta di una permutazione dei nostri posti a tavola, non fa lo stesso che Alfonso stia accanto a Maria o che Maria stia accanto ad Alfonso? qui i casi sono due: inoltre noi non formiamo raggruppamenti. Noi tutti quattordici, quanti siamo, formiamo ogni giorno una serie disposta in modo diverso. È lo stesso come se prendessimo quattordici oggetti e cercassimo di ordinarli in serie, in tutti i modi, ogni volta diversi. A scuola ho imparato che questa operazione si chiama una « *permutazione* » e c'è una formola che dice che il numero delle permutazioni possibili è dato dal *fattoriale* del numero degli elementi da permutare. Nel nostro caso 14! ». Il padre sorride soddisfatto, trae di tasca una matita e sul margine del giornale, incomincia ad allineare moltiplicazioni; vien fuori una cifra colossale 87.178.291.200. Ottantasette miliardi di possibili combinazioni! Ma l'anno non ha che 365 giorni. E allora? « ci vorranno circa 239 milioni d'anni » grida Alfonso, il calcolatore prodigio della famiglia: « propongo per abbreviare le cose di cambiare due volte al giorno, a colazione ed a pranzo ». « E allora io sarò morto, prima che io possa avere una buona posizione a tavola » piange il figliuolo che aveva provocato l'incidente.

Con questo esempio abbiamo illustrato ad un tempo il demoniaco sviluppo delle possibilità di scambiare 14

cifre, la magica forza del comando 14! e mostrato in pari tempo la prima specie di possibilità di combinare le cose (1).

Procediamo in una ricerca sistematica sul nuovo materiale acquisito.

Anzitutto per buona pace del lettore: la nostra onesta famigliola, spaventata dai calcoli e pur volendo prendere in considerazione il giustificato reclamo di un suo affezionato membro, ha trovato un diversivo. Susanna, la fantesca, continuerà a servire incominciando sempre dalla stessa sedia, chiunque la occupi, e, ad ogni successivo giorno tutti quanti si sposteranno di un posto, in un dato senso intorno alla tavola. Così non si cambierà l'ordine gerarchico e con questa soluzione ogni 15 giorni ognuno dei commensali verrà servito per il primo.

Matematicamente, noi ci troviamo qui nel caso di 14 permutazioni, delle quali noi ne scriveremo ora alcuna:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (primo giorno)
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 1 (secondo giorno)
3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 1, 2 (terzo giorno)
. . . . . .
14, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 (quattordicesimo giorno)
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (quindicesimo giorno)

Ecco le quattordici permutazioni fatte con ordine ciclico, che sono uno dei tanti casi delle 87.178.291.200 possibili, ricavate ponendo la condizione di non turbare l'ordine stabilito a tavola.

Nell'esempio numerico abbiamo indicato con cifre i posti che vanno scambiati a tavola; avremmo potuto indicarli con lettere dell'alfabeto, o con i nomi degli interessati. La numerazione da noi adottata, poteva essere sostituita da qualunque altro segno distintivo, magari da un colore diverso. Quando si vuol distinguere tanti individui della stessa specie, si può per es. indicare cia-

(1) Nicolò Tartaglia, bresciano, fu il primo a dare una regola mnemonica per ricordare le permutazioni in un noto gioco. (Tartaglia libro 16 N. 196).

scuno con un «indice», piccola cifra distintiva, allo scopo di poterli ordinare facilmente. Questo, dell'ordinare cifre o lettere ha acquistato, da Leibnitz in qua, una grande importanza in matematica (fu infatti Leibnitz a introdurre questo algoritmo dell'ordinamento). Ora vo' spiegarmi in un modo non perfettamente facile: ho affermato apoditticamente, che i numeri e le cose che permutiamo hanno tutte uno stesso valore, e che i numeri o indici non ci danno la minima idea di un «ordine di grandezza». Può darsi che le cose che io vo considerando abbiano una grandezza effettivamente diversa, ma questo non interessa nel caso in esame: le «cose» vengono considerate nella loro sola unità di «cose». Così posso dire che la cosa a cui abbiamo attribuito la cifra 2 o che porta l'indice 2, ha un «numero d'indice» più alto di quella che ha la cifra uno o porta l'indice 1; del resto considero la prima «cosa» perfettamente uguale alla seconda e sopratutto di grandezza uguale.

Anche qui c'entra la «cabala»: la cabala della classificazione o dei numeri ordinali. Io non potrei nè parlare nè scrivere di ordinamento se non potessi disporre i miei indici secondo un «ordine crescente o decrescente di numeri». In caso contrario l'alfabeto sarebbe forse più esatto e meno equivoco degli indici a cifre. Le sue lettere si portano dietro in qualche modo il loro significato ordinale.

La lettera *d* è nell'alfabeto o nell'«ordine alfabetico» in posizione più alta della lettera *b*, perciò, nella scienza delle combinazioni, la «cosa» *d* è classificata più avanti della *b*. (1).

Stabilendo così un ordine di posto, risulta un «ordine giusto» per tutte le considerazioni sulle combinazioni.

---

(1) Questo ordinamento per lettere si chiama anche «lessicografico» perchè è fatto a guisa di quello dei vocaboli in un lessico, cioè per ordine alfabetico.

Questo ordine giusto si ha quando per es. in una permutazione si procede nel modo seguente:

abc, acb, bac, bca, cab, cba oppure, in cifre
123, 132, 213, 231, 312, 321

Con questo modo di procedere, nel quale sempre l'elemento « inferiore » viene mantenuto al suo posto fino a che sia possibile, non ci può sfuggire alcuna combinazione: noi procediamo in buon ordine dalla più « bassa » alla più « alta » permutazione ed otteniamo come « prova » della fine dei nostri sforzi l'inversione della permutazione iniziale. Mentre nella permutazione più bassa nessun elemento di ordine superiore stava prima di un altro di ordine inferiore, nella permutazione più alta succede l'opposto. Non voglio troppo confonderti, o lettore, ma non posso a meno di osservare che in una permutazione con numeri reali, effettivamente la permutazione più bassa esprime il numero più basso, quella più alta il numero più alto (123...321). Frammezzo si trovano, ordinate per numeri totali crescenti, tutte le altre permutazioni di 1, 2, 3 :... Cerchiamo ora con un atto energico di dimenticare queste ultime relazioni e torniamo ai nostri indici: 123 significa ora per noi la stessa cosa di 321 o 231, cioè una qualunque arbitraria permutazione dei tre numeri suddetti.

Ora cerchiamo una risposta al quesito: come mai il nostro misterioso comando, il nostro fattoriale, quel 3 seguito dal punto esclamativo, possa dare in modo così sicuro il numero totale delle possibili permutazioni.

Per completezza o come si usa dire « per rispettare il sistema » incominciamo con l'affermare un « non senso » logico. Abbiamo già fatto qualcosa di simile a proposito delle potenze, considerando la potenza zero e la potenza 1. Chiediamo quale sarà il numero delle permutazioni quando abbiamo a permutare un solo elemento. Il comando ricevuto è: « Permuta in buon ordine un

elemento finchè tu avrai esaurite tutte le possibilità ». Dopo di avere debitamente riflettuto, formuliamo matematicamente il « non-senso » mediante un secondo « non-senso » magari più enorme ancora. Scriviamo senza batter ciglio:

Numero delle permutazioni di 1 eguale 1, uguale a fattoriale di 1. Secondo la regola, per ottenere questo risultato dobbiamo, cominciando da 1, moltiplicarlo tante volte per le cifre che seguono, e che non ci sono, fino a che otteniamo 1 come prodotto. Vi fa meraviglia che troviamo 1? Dopo questo eccesso di logica, tiriamo avanti. Che cosa succede con due elementi a, b? Scrivendoli in buon ordine avremo:

a b b a.

e con ciò non è dubbio che abbiamo esaurito il numero di tutte le possibili permutazioni dalla più bassa alla più alta. E ora aguzziamo l'ingegno per trovare la via di passaggio verso la formola che abbiamo solo affermata finora. Che cosa abbiamo fatto: abbiamo tenuto più a lungo che fosse possibile l'*a* nella sua posizione e intanto abbiamo permutato il *b* ; ciò fatto abbiamo spostato *b* nel primo posto e permutato l'*a*. Abbiamo in sostanza fatto due volte la permutazione dei singoli elementi.

Un solo elemento ammette una sola permutazione, quindi il numero di permutazioni di due elementi è $1 \times 2 = 2$ o 2 ! (fattoriale di 2). Con tre elementi si ha:

a b c	b a c	c a b
a c b	b c a	c b a

Applicando nuovamente il nostro metodo, possiamo affermare di avere tenuto fermo per ben tre volte l'elemento che figurava per primo, mentre permutavamo gli altri due, e poichè il numero di permutazioni di due elementi è 2, noi abbiamo fatto 1.2.3 permutazioni: cioè 3 !.

Per quattro elementi si ha ancora:

a b c d	b a c d	c a b d	d a b c
a b d c	b a d c	c a d b	d a c b
a c b d	b c a d	c b a d	d b a c
a c d b	b c d a	c b d a	d b c a
a d b c	b d a c	c d a b	d c a b
a d c b	b d c a	c d b a	d c b a

Non staremo a ripetere tutto il procedimento. Abbiamo in poche parole trattenuto il primo elemento fino a completamento della permutazione degli altri tre; poichè gli elementi, qui sono quattro, cioè dobbiamo trattenere nel primo posto quattro elementi, ci toccherà moltiplicare per quattro il numero $1 \cdot 2 \cdot 3$ ossia $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4$. delle permutazioni di tre elementi. Avremo quindi

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4\,!$$ ossia 24.

Procedendo ancora, troviamo in generale che ogni permutazione di parecchi elementi contrassegnati da indici, rivela tante possibilità di spostamento quanto è il numero di elementi, al quale numero dobbiamo porre il segno ! di fattoriale. Il numero dunque di permutazioni di 10 elementi sarà 10 ! quello di 25 elementi 25 ! quello di 3124 elementi, 3124 ! e così fino all'infinito. Ora potrebbe succedere che alcuni degli elementi sieno affetti di uguale indice o di eguale lettera. Io vorrei per es. permutare due albicocche a, due banane b e una ciliegia c in modo da formare tutti i possibili gruppi di questo « giardinetto » di frutta. Qui non ha nessuna importanza se io prendo la banana 1 o la 3 anzichè la 2 oppure l'albicocca 2 anzichè la 1. Il caso di permutazione bene ordinata si pone così:

a a b b b c	come prima permutazione e
c b b b a a	come ultima.

Ci vorrebbe molto tempo per ricavare la formola per questo caso di *permutazione* a elementi doppi o multipli.

Il lettore mi crederà su parola se gli indico semplicemente la formola, che è data dal numero totale di permutazioni (6 !) diviso per il prodotto dei fattoriali dei singoli elementi, cioè:

$$\frac{6!}{2!\cdot 3!\cdot 1!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2 \times 1\cdot 2\cdot 3 \times 1} = 60$$

Posso così combinare con le tre frutta, 60 giardinetti diversi – per tutti i gusti dei clienti del ristorante.

Un esempio ancora: quale sarà il numero delle permutazioni di a b b b b c? La nostra formola dà:

$$\frac{6!}{1!\cdot 4!\cdot 1!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1 \times 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \times 1} = 30$$

Tu lettore, che hai l'occhio buono, osservi subito che, supponendo tolti i punti esclamativi, il totale delle cifre tanto al numeratore che al denominatore è sempre lo stesso. Questo è evidente poichè portiamo il fattoriale del numero di tutti gli elementi, poi lo dividiamo per il prodotto dei fattoriali dei singoli gruppi di elementi.

Si potrebbero ancora dire tante cose sulle permutazioni e risolvere tanti problemi interessanti, ma questo ramo della matematica non ha molta importanza per quel che avremo da dire in seguito. Perciò chiudo, assodando ancora un fatto: nella permutazione si devono adoperare sempre tutti gli elementi e poichè questi devono essere permutati, la diversa successione degli elementi decide se si hanno o meno diversi casi di permutazione.

La permutazione non è quindi altro che spostamento dell'ordine di successione.

Capitolo VI

LA COMBINAZIONE IN SENSO RISTRETTO

L'ultima constatazione fatta nel capitolo precedente ha uno scopo, come tosto scopriremo. Rivediamo più da vicino la seconda specie di combinazioni, non teoricamente, ma con immagini, e torniamo alla bella famiglia italiana di 14 persone che abbiamo imparato a conoscere. La troviamo proprio in un giorno festivo al momento in cui combina qualche gioco. Essendo stata proposta una partita a carte, ci si ricorda della dannata disposizione attorno alla tavola, e si solleva la quistione: quanto tempo potrà occorrere perchè sieno esaurite tutte le possibilità di una partita di tarocchi fra quattro dei quattordici presenti, cambiando ogni giorno la muta dei giocatori per modo che ciascuno possa avere occasione di giocare una volta?

La compagnia è alquanto intimidita e non vuol fare previsioni: forse si tratterà di nuovo di milioni di anni? meglio affidarsi alla cabala, all'algoritmo delle combinazioni, prima di lanciare un responso. E il figlio dalla bozza matematica afferma subito che si tratta qui di « combinazioni in senso ristretto ». Quattordici persone per il matematico non sono altro che quattordici « cose », o quattordici « elementi ». Si tratta di formare con i quattordici elementi tante quaterne diverse: qui basta formare una quaterna e non una serie di elementi da permutare in questo gruppo di quattro. Poichè la muta di papà, mamma, Alfonso ed Eva è la stessa di quella di Eva, Alfonso, mamma e papà o di mamma, Eva, Alfonso e papà e così via dicendo. E il calcolo si fa abbastanza presto. Per esso esiste un solo segno magico, il cosidetto « coefficiente binomiale ». – Detto di passata,

questo nome non ha nulla a che fare con l'onesta famiglia. È un simbolo che si ottiene scrivendo semplicemente, in alto, al di sopra, il numero degli elementi: (14) e in basso o al di sotto, in colonna, la composizione del gruppo: 4. Si legge 14 su 4 e si eseguisce l'ordine così:

$$\binom{14}{4} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

ciò che darà per risultato 1001 giorni: cioè neppure tre anni di partite. Questo risultato è incoraggiante, poichè si è giunti ad una cifra che dice qualche cosa, mentre i miliardi davano il capogiro. Una delle figliole, imbaldanzita, propone un nuovo quesito: « di dodici figlioli, vedi caso strano, siamo proprio sei ragazzi e sei bambine, sapete dirmi quante coppie diverse potremmo formare fra di noi se si facessero « due salti in famiglia »? questa sarebbe una « combinazione » che mi andrebbe a fagiolo. Qui ci sono dodici cose, come dite voi e in gruppi di due, eppoi mi pare che faccia proprio lo stesso che sia Alfonso che balli con Eva o Eva con Alfonso ». – « Combinazione di ambi, replica il fratello matematico; come negli ambi del lotto. Ma potrei calcolarti il risultato, in modo pedestre, senza ricorrere alle combinazioni. Di voi sei sorelle ciascuna ballerà a turno con uno di noi sei fratelli, cioè sei volte: sei per sei sono trentasei. Eccoti servita del numero di coppie danzanti ». « E allora a che serve la tua formola magica di poc'anzi? ». « In questo caso si poteva calcolare direttamente, ma ti mostrerò come la formola rende chiaro il calcolo e conferma il conto della serva che ho fatto ora. Vedi, tutti gli ambi di 12 elementi danno $\binom{12}{2}$ combinazioni. Ora tra questi ambi sono calcolate le coppie di due fratelli e di due sorelle, ciò che abbiamo escluso. Dobbiamo mettere la condizione che sieno vere coppie: dovremo dunque togliere le coppie di ballerini di ugual sesso. Queste sono

pure casi di combinazioni con sei elementi maschili e sei elementi femminili, cioè $\binom{6}{2}$ ambi maschili e $\binom{6}{2}$ ambi femminili. Scriviamo pure

$$\binom{12}{2} - \binom{6}{2} - \binom{6}{2} = \binom{12}{2} - 2\binom{6}{2} =$$

$$= \frac{12.11}{1.2} - 2\frac{6.5}{1.2} = 66 - 30 = 36$$

come avevo trovato prima ».

Prima di spiegare il « comando » $\binom{14}{2}$, $\binom{12}{2}$ introdotto dal grande matematico svizzero Eulero, tiriamo ancora in ballo i nostri indici, come per le permutazioni e vediamo i casi di combinazioni « bene ordinate ». Siamo di nuovo insaziabili e affermiamo che esistono dei singoli gruppi unitari. Questi non sono che gli elementi stessi; a b c d e f ha quindi sei « singoli » che esauriscono tutte le possibilità di combinazioni unitarie: gruppi di due, sappiamo essere gli ambi; gruppi di tre, terni; gruppi di quattro, quaterne. Anche senza essere fanatici del R. Lotto.

Proviamoci a formare i terni degli elementi $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$: avremo

1 2 3	1 3 5	2 3 4	2 5 6
1 2 4	1 3 6	2 3 5	3 4 5
1 2 5	1 4 5	2 3 6	3 4 6
1 2 6	1 4 6	2 4 5	3 5 6
1 3 4	1 5 6	2 4 6	4 5 6

Il segno della fine dell'operazione si ha nel fatto che si devono eliminare tanti degli ultimi elementi bene ordinati, senza salti, quanti sono gli elementi del gruppo. Qui gli ultimi tre elementi sono 4, 5, 6. Se facessimo degli ambi bene ordinati per es. con le cifre 1, 2, 3, 4, 5,

6, 7, 8, 9 il primo ambo sarebbe 12 e l'ultimo 89. Noi vediamo inoltre che nella combinazione non possiamo mettere un elemento più elevato dinanzi ad uno più basso; per es. un 4 dinanzi ad un 2: poichè si è già trovato l'ambo 24 formato dagli stessi elementi in ordine diverso e non si può ripetere la combinazione. Formiamo ancora, per esercizio, le quaterne degli elementi a b c d e f g: avremo:

abcd	acde	adef	aefg	bcde	bdef	befg	cdef	cefg	defg
abce	acdf	adeg		bcdf	bdeg		cdeg		
abcf	acdg	adfg		bcdg	bdfg		cdfg		
abcg	acef			bcef					
abde	aceg			bceg					
abdf	acfg			bcfg					
abdg									
abef									
abeg									
abfg									

Il modo di procedere risulta evidente: si scrive la quaterna dei quattro primi elementi a b c d, poi si scambia finchè si può, l'ultima lettera con una più alta nell'ordine alfabetico. Ciò fatto si ripete per la penultima lettera della quaterna.

Il numero totale delle combinazioni possibili si trova con il seguente ragionamento: ho per es. 6 elementi da combinare in ambi, devo cioè accoppiare ciascuno di questi 6 elementi con ciascuno dei $(6 - 1)$ elementi restanti, cioè con 5 elementi distinti. Avrò $6 \cdot 5 = 30$ ambi. Questo è però troppo: poichè, procedendo così, calcolo ogni ambo due volte, cioè una volta come « a b » ed una come « b a », poichè ho unito ognuno degli elementi considerati con ognuno dei rimanenti. Il numero esatto di combinazioni è $\frac{6\,(6-1)}{2}$ ossia $\binom{6}{2}$ questo vuol dire eseguire la divisione dei prodotti $\frac{6 \times 5}{1 \times 2}$

Se passo ai terni, io devo unire ciascuno degli ambi già formati con gli elementi rimanenti $(6-2)$ che non figurano in essi. Il numero dei terni è allora $\frac{6\cdot(6-1)}{2}\times\frac{(6-2)}{3}$ poichè anche qui devo fare retrocedere il numero delle permutazioni mediante una divisione per 3. E così si tira avanti. La legge di formazione risulta ora chiara: dai novanta numeri del lotto per es. potranno venir fuori la bellezza di $\frac{90\cdot(90-1)\,(90-2)}{1\cdot2\cdot3}=\frac{704880}{6}$ $=117300$ terni. Eppoi ditemi se il Lotto non è una tassa sugli imbecilli!

E ora esaminiamo più da vicino la chiave magica di Eulero, quel $\binom{10}{5}$ o $\binom{14}{4}$ e simili: si è visto come essa rappresenti anche un «comando». Solo questo «operatore» o coefficiente binomiale dimostra di avere delle proprietà curiose in quanto permette di eseguire l'ordine in più modi: anzitutto nel modo da noi seguito fin qui. Notiamo di passata che il numero che sta in alto è sempre maggiore, o tutto al più può essere eguale, a quello che gli sta sotto. Perciò il comando dice: trasforma il segno magico in una frazione ordinaria, scrivendo al denominatore il fattoriale del numero in basso e al numeratore, a partire dal numero che sta scritto in alto, forma con esso e con il numero stesso, diminuito successivamente di 1, 2, 3,... unità, tanti fattori quante unità contiene il numero scritto in basso: così per es.:

$$\binom{17}{6}=\frac{17\ 16\ 15\ 14\ 13\ 12}{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6}\ \text{oppure}\ \binom{8}{7}=\frac{8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2}{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7}\ \text{oppure}\ \binom{19}{2}=\frac{19\ 18}{1\ 2}$$

Allo stesso risultato giungerei in quest'altro modo: io potrei scrivere $\binom{17}{6}$ così:

$$\frac{17!}{6!\,(17-6)!}\ \text{cioè}\ \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot16\cdot17}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\times1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11}$$

Il lettore anche mediocremente pratico di calcolo vede che qui si può semplificare, dividendo sopra e sotto per 11 !, con che si ricasca nel calcolo di cui sopra. Ma c'è dell'altro. Lo mostreremo con un esempio assai chiaro: il « comando » $\binom{8}{3}$ secondo l'ultimo metodo, equivale a $\frac{8!}{3!(8-3)!}$ ossia $\frac{8!}{3!\,5!}$ o in tutte cifre: $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3\times1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$ e qui sono in dubbio se abbreviare dividendo per 3 ! o per 5 ! sopra e sotto, come dovrei logicamente fare. Ricordiamo di passata che una frazione si può semplificare dividendo sopra e sotto per qualunque fattore. Ora, ammettiamo che io voglia semplificare dividendo solo per 3 ! o per 5 !. Proverò col 5 ! : avrò $\frac{6\cdot7\cdot8\cdot}{1\cdot2\cdot3\cdot}$ ossia, capovolgendo l'ordine dei fattori del numeratore, vengo a ricadere nel primo caso visto. E se faccio col 3 !? Ottengo, con mia meraviglia, un'altro risultato, cioè:

$$\frac{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} \text{ ossia } \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$$

Che cosa vuol dire questo? C'è qualcosa che non va? Eseguiamo assieme e con calma tutta l'operazione, troveremo

$$\binom{8}{3}=\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}=56 \quad \text{e} \quad \binom{8}{5}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=56$$

Non ci siamo affatto sbagliati: ci sono tanti « quinterni » di otto elementi quanti terni. E altrettanti ambi quanti « sesterni ».

Proviamo ad ordinare in serie un certo numero di questi comandi, per es.:

$$\binom{9}{1}\ \binom{9}{2}\ \binom{9}{3}\ \binom{9}{4}\ \binom{9}{5}\ \binom{9}{6}\ \binom{9}{7}\ \binom{9}{8}$$

Sappiamo ora che il primo operatore dà lo stesso risultato dell'ultimo, il secondo lo stesso del penultimo, il

terzo lo stesso dell'antepenultimo e quindi il quarto lo stesso del quinto operatore.

Poichè si avrà sempre la relazione generale:

$$\binom{\text{Numero di elementi}}{\text{Grandezza del gruppo}} = \binom{\text{Numero di elementi}}{\text{N. di elementi meno grandezza del gruppo}}$$

L'esecuzione della serie qui sopra darebbe:
9 singoli, 36 ambi, 84 terni, 126 quaterni, 126 quinterni, 84 sesterni, 36 setterni, 9 otterni.

Questa simmetria singolare, questa regolarità ricorrerà ancora più avanti nella « seria binomia » che ci fornisce il magico algoritmo per calcolare difficili potenze di somme.

Ora possiamo anche combinare in senso ristretto. Notiamo qui che la cifra che indica se si tratta di ambi, di terni ecc. ci dà anche « la classe » della combinazione. Così $\binom{5}{3}$ vuol dire: « se tu calcoli, in uno dei due modi indicati sopra, con questa chiave magica, otterrai il numero di combinazioni di terza classe per 5 elementi. » Così noi otteniamo, secondo la relazione qui sopra, anche il numero di combinazioni di seconda classe per lo stesso numero di elementi; poichè: $\binom{5}{3} = \binom{5}{5-3} = \binom{5}{2}$.

Ora si dà anche qui, come con le permutazioni, la possibilità delle cosidette « ripetizioni », solo esse, nelle combinazioni, significano qualcos'altro. E precisamente, nelle permutazioni si ha solo un ripetersi di più elementi di eguale indice o di eguale nome (albicocche, banane, ciliege) cioè più a, più b, più c, o più cifre 2, più cifre 3. Nella combinazione con ripetizione limitata, si ha invece la facoltà di prendere lo stesso elemento quante volte lo si sia prefisso. Io potrei con 5 elementi: $a\ b\ c\ d\ e$ formare per es. i seguenti termini:

a a a, a b b, b b c, d e e, d d d e così via.

Sarebbe noioso e difficile di ricavare qui la formula

che ci dà il numero di siffatte possibilità di combinazioni. Diamone senz'altro il risultato. La formola si scrive:

$$\binom{\text{N.° degli elementi, più la classe, meno uno}}{\text{N.° della classe}}$$
sopra

Se abbiamo per es. 8 elementi con i quali, con facoltà di ripetizioni a piacimento, dobbiamo formare delle quaterne, scriveremmo $\binom{8+4-1}{4} = \binom{11}{4} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330$ il che naturalmente è assai più del numero di quaterne di otto elementi senza ripetizione, il quale sarebbe $\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$.

Per conchiudere nelle nostre considerazioni sulla « combinazione in senso ristretto », noi impartiremo di nuovo uno di quei comandi « senza senso » di cui abbiamo già visto varii casi, ma che servono a perfezionare e ad inquadrare il sistema. Noi, reclute della Matematica, dobbiamo abituarci a siffatti comandi, a consolidamento della necessaria disciplina: poichè nel servizio militare non esiste l'impossibile e un comando è un comando. Noi domandiamo di sapere quanto varrà un numero posto « sopra » lo zero nel senso della chiave combinatoria. Cioè per es. $\binom{9}{0}$. Problema da pazzi o da spiritisti! Poichè questo vorrebbe dire di scrivere, nella prima maniera esposta sopra, zero volte il fattore 9 a numeratore, diminuito ogni volta dell'unità e al denominatore dovrei scrivere 0! cioè il fattoriale di zero. Vale a dire: « scrivere tutti i numeri cominciando da 1 fino a che giungo allo zero. « Questo in linguaggio alpinistico equivarrebbe all'ordine di salire finchè io abbia raggiunta la valle sottostante. Facciamo uno scongiuro e cacciamo Belzebub con un altro diavolo, adoperando la « controcabala ».

Ma c'è ancora un altro comando pazzesco, del resto innocuo: cioè « il numero sopra se stesso »; come a dire $\binom{6}{6}$. Questo almeno si può calcolare ed è uguale a $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 1$. È evidente che non si possa dare che una sola combinazione di tutti gli elementi quando la classe è del numero di questi.

Ora siamo in possesso di tutto il sistema: abbiamo visto sopra che quando si ordinano tutti i coefficienti binomi di uno stesso numero di elementi secondo le loro classi crescenti di una unità per volta e si dispongono in serie, due coefficienti binomi qualunque, equidistanti dagli estremi della serie, forniscono valori eguali. E poichè in grazia di questa norma di simmetria dovrà essere $\binom{9}{1} = \binom{9}{8}$, ci basta di sapere dove collocheremo $\binom{9}{0}$ e $\binom{9}{9}$: evidentemente, prima del $\binom{9}{1}$ l'uno e dopo il $\binom{9}{8}$ l'altro. E allora poichè sappiamo già che $\binom{9}{9} = 1$, per l'anzidetta regola di simmetria, ne concluderemo anche che $\binom{9}{0} = 1$.

Il nostro algoritmo ci ha portato sopra precipizii: abbiamo fatto un « passaggio » assai esposto, come dicono gli alpinisti, su concetti che ci è impossibile rappresentare alla mente, ma eccoci di nuovo su roccia soda, con dinanzi a noi una visione chiara, semplice, completa, comprensibile dell'insieme.

Questa nostra osservazione valga per caratterizzare l'essenza di un algoritmo valido: quando ce ne saremo perfettamente capacitati, non ci sarà difficile di comprendere l'intera analisi infinitesimale: il tanto temuto calcolo differenziale ed integrale ci apparirà come un esercizio acrobatico interessante che ci porta, attraverso

a « passaggi esposti », verso punti di vista nuovi, di dove potremo contemplare abissi meravigliosi.

Da gente che fa sul serio, verifichiamo ancora per altra via, se il passaggio che ci ha portati a concludere che $\binom{9}{0} = 1$ non è un trucco. Perciò serviamoci di un'altra proprietà del nostro comando, cioè, come già visto, che $\binom{9}{9}$ si può anche scrivere $\binom{9}{9-0}$ come $\binom{9}{4} = \binom{9}{9-4} = \binom{9}{5}$.

Già a prima vista si nota che $\binom{9}{9}$ e $\binom{9}{9-0}$ costituiscono una identità.

Consideriamo ancora, per concludere, un'ultima singolarità della serie completa di coefficienti binomî di un dato numero di elementi: sempre la loro somma non è che il numero 2 elevato alla potenza il cui esponente è dato dal numero degli elementi: nel caso qui sopra 2^9. Sommiamo difatti i valori, per es. di $\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$ avremo $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$. Qui, come si vede, abbiamo scritto giù anche $\binom{4}{0}$ e $\binom{4}{4}$.

Altra osservazione: poichè il numero delle classi si estende dalla classe zero a quella del numero degli elementi, si ha, per un numero pari di elementi, un numero impari di classi e per un numero impari di elementi un numero pari di classi. Avremo dunque in tutto dieci classi nel caso di nove elementi: dieci comandi di operazioni da eseguire.

Capitolo VII

VARIAZIONI

Nel corso del nostro studio sulle combinazioni, abbiamo finora considerato prima il caso in cui si debbano adoperare ogni volta tutti quanti gli elementi: che venivano semplicemente scambiati di posto. E ciò costituiva la *permutazione*. Di questa si considerò un sottocaso, cioè quello in cui ciascun elemento potesse essere preso più volte, ripetutamente. Naturalmente al più tante volte quanto è il numero degli elementi. Come seconda possibilità abbiamo considerata la *combinazione* in *senso ristretto*, nella quale solo una certa parte degli elementi vengano presi in gruppi di combinazioni o classi, con che si era premesso che un gruppo viene considerato distinto dall'altro solo se esso comprende una diversa miscela degli elementi raggruppati. Anche qui ci siamo occupati del sottocaso, della *ripetizione* dei *singoli elementi* e precisamente della loro *indefinita ripetizione*.

Rimane ora ad esaminare un caso che è il più generale nell'arte combinatoria, cioè le *variazioni*. Esso rappresenta un impiego limitato degli elementi raggruppati in classi, contraddistinto non solo da combinazioni entro la classe, ma dall'ordinamento in serie entro la classe stessa.

Per es. con gli elementi a b c d e f noi possiamo formare degli ambi non solo come *a b* e *d e*, ma anche degli ambi rovesciati *b a* ed *e d* con una *combinazione a permutazioni*.

La nostra non mai abbastanza bistrattata famiglia, tirata in causa a scopi di calcolo, avrebbe ora deciso di mandare ogni settimana cinque dei figliuoli a teatro in un palco messo a loro disposizione. Qui, come per le

partite a carte, si presenta una combinazione in senso ristretto di 12 elementi di quinta classe. Ma i bambini dicono che da ogni posto del palco si vede in modo diverso sulla scena e che sarebbe giusto che ciascuno di essi potesse occupare a turno il posto migliore nel palco. Si ha qualcosa come la partita a carte, ma accoppiata ad uno scambio ciclico di posti. Siamo ormai abbastanza esperti per risolvere rapidamente il quesito, cioè calcolare la variazione. Dividiamo in due tempi il comando di variazione: primo tempo; combinare, secondo tempo: permutare entro il gruppo di combinazioni. Matematicamente questo non vuol dire altro se non accoppiare il comando di combinare con quello di permutare per mezzo di un segno di moltiplicazione; anche questo, rappresentante un comando. Nel caso in esame scriveremo $\binom{12}{5} \times 5!$ ossia $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ ossia, tenendo presente che il denominatore del primo fattore è uguale al secondo fattore, avremo in sostanza $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95040$ sere. I nostri 12 fratelli impiegherebbero 1821 anni per condurre a termine il loro programma teatrale.

Avremmo potuto giungere direttamente alla variazione, se avessimo proceduto come per la prima esecuzione del comando delle operazioni di combinazioni in senso ristretto (V. a pag. 33). Ricordiamo come avevamo reso invertibile la variazione già ottenuta per mezzo di una divisione per il fattoriale della classe.

Riepilogando brevemente cose già dette, possiamo calcolare nel modo seguente: si dispone di 12 elementi: formiamo prima le « unità » cioè i gruppi singoli: di questi non ce ne sono naturalmente che 12. Per ricavare da questi gli ambi, dobbiamo accoppiare ogni « unità » con i rimanenti $12 - 1 = 11$ altri elementi. Il numero degli ambi sarà: $12.11 = 132$. Per avere i terni, accoppieremo ciascun ambo con i $12 - 2 = 10$ altri elementi che an-

cora rimangono. Il numero dei terni sarà dunque $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$ e così via.

Abbiamo cioè incominciato col formare, dal numero degli elementi come primo fattore, un prodotto con esso di tanti fattori ottenuti diminuendo dell'unità il precedente, e ciò per quante sono le unità della classe.

Resta ancora da considerare una possibilità: la variazione con illimitata ripetizione dei singoli elementi entro i gruppi di variazione.

Facciamo una sosta: siamo giunti, senza avvedercene, d'un tratto, ad un caposaldo della nostra ricerca. Su di un torrione del picco dei numeri che stiamo ascendendo, dal quale possiamo dominare enormi conseguenze. Che cosa vuol dire variazione con illimitata ripetizione di tanti elementi? A prima vista vuol dire null'altro se non che possiamo formare ambi, terni, quaterne ecc. ed entro questi gruppi non solo possiamo permutare, ma anche iscrivere uno stesso elemento quante volte crediamo. Così avremo terne degli elementi 1, 2, 3, 4, 5, 6 variate con ripetizioni, come 111, 123, 321, 211, 335, 616, 422, e così via. Guardiamo più da vicino e con più attenzione: non vi sembra questa la formazione della infinita serie dei numeri?

E lo è difatti, anzi ne è la legge fondamentale.

Prendiamo in considerazione lo zero ed estendiamo a dieci il numero degli elementi, poi diamo il comando della « variazione con ripetizione »: avremo *tutto il sistema decimale*. Con una sola limitazione però: gli zeri non potranno stare nel primo posto dinanzi ad altre cifre.

Vedremo questo più avanti: diciamo ora che le unità sono numeri a una cifra, gli ambi a due, i terni a tre e così via.

Siccome, tuttavia, non sappiamo come si calcoli il numero delle variazioni con ripetizione di 2^a, 3^a, ennesima classe, dobbiamo imporci ancora alcuni istanti di disci-

plinata attenzione. Lasceremo stare i dieci elementi e indagheremo freddamente, quante siffatte variazioni con ripetizione potremo eventualmente formare con 5 elementi a b c d e. Ricominciamo dalle unità. Siccome qui si può ripetere senza limiti, si uniscano in ambi ognuna delle unità con ciascun elemento: così si ottiene aa, ab, ac, ad, ae, ba, bb, bc, bd, be, ca, cb, cc, cd, ce, da, db, d, dc, de, ea, eb, ec, ed, ee. Si ottengono cioè $5 \times 5 = 25$ ambi. Per formare i terni si accoppia ora ogni ambo con ciascuno dei 5 elementi: si avrà $5 \times 5 \times 5 = 125$ terni: il numero delle quaterne sarà $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ e così via. Io non ho dinanzi a me nè fattoriali, nè coefficienti binomi; semplicemente delle potenze. E la *base* (come viene chiamato il numero che si eleva a potenza) è costituita dal numero degli elementi (qui 5) mentre l'esponente indica l'ordine della classe.

Nel nostro caso si avrà:

Numero di unità . . . $5^1 = 5$
» » ambi . . . $5^2 = 25$
» » terni . . . $5^3 = 125$
» » quaterne . $5^4 = 625$

Torniamo ora al nostro sistema di calcolo. Possiamo già affermare che tutti i sistemi di ordinamento per ordine di grandezza non sono altro che sistemi « ben ordinati » di variazioni a ripetizione illimitata, nei quali, come già si è detto, s'impone la condizione ausiliaria che lo zero non possa mai trovarsi davanti ad un numero. Fabbrichiamoci ora il sistema decimale per mezzo di gruppi di variazioni, intendendo d'ora innanzi sotto questo nome la variazione a ripetizione illimitata.

È chiaro intanto che i primi dieci numeri ad una cifra (compreso lo zero) costituiscono le unità del nostro sistema di variazioni. La formola ci dice che vi sono 10^1, cioè dieci di questi gruppi unitari. Numero di elementi $= 10$, ordine della classe 1. Con gli ambi dobbiamo già

procedere con maggior cautela: secondo la formola, possiamo formare 10^2 ossia 100 ambi. Ora tutti sanno, anche quelli che non giocano al Lotto, che si hanno solo 90 numeri di due cifre: da 10 a 99. Esistono dunque 10 ambi che non sono compresi nel sistema decimale? Rispondiamo subito: sì, esistono, ma sono inefficaci e nulli: sono precisamente i dieci ambi 00, 01, 02 ... 09 che, per la condizione ausiliaria sopra espressa, non sono validi, perchè rappresentati da uno zero posto dinanzi ad un numero, ciò che è « tabù ». Del resto, come potremmo combinare un elemento con zero, con nulla? Di terni ce ne dovrebbero essere 10^3, cioè mille. Anche qui vediamo che in realtà ce ne sono solo 900 cioè dal 100 al 999 compreso. E qui vediamo che i rimanenti 100 per arrivare al migliaio, essendo preceduti dallo zero al primo posto sono nulli. Nello stesso modo ci dovrebbero essere $10^4 = 10.000$ quaterne, di cui mille nulle e quindi solo 9000 reali.

Con un po' di riflessione possiamo ancora semplificare la formola che ci dà il numero delle variazioni. Quando cioè, in base alle cose esposte, riflettiamo che il numero degli ambi si presenta così:

$$10^2 - 10^1 = 100 - 10 = 90$$

e quello dei terni così:

$$10^3 - (10^2 - 10^1) - 10^1 = 10^3 - 10^2 + 10^1 - 10^1 = \\ = 10^3 - 10^2 = 900$$

quello delle quaterne

$$10^4 - [10^3 - (10^2 - 10^1) - 10^1] - (10^2 - 10^1) - 10^1 = \\ = 10^4 - [10^3 - 10^2 + 10^1 - 10^1] - 10^2 + 10^1 - 10^1 = \\ = 10^4 - [10^3 - 10^2] - 10^2 = 10^4 - 10^3 + 10^2 - 10^2 = \\ = 10^4 - 10^3 = 9000.$$

Vediamo che per trovare il numero per un ennesimo gruppo, basta sottrarre dalla potenza ennesima del 10 quella $(n - 1)^{esima}$. Così il numero dei gruppi a sette cifre del sistema decimale sarà $n = 7 - 1 = 6$.

$10^7 - 10^6 = 10.000.000 - 1.000.000 = 9.000.000$
cioè tutti i numeri a 7 cifre da 1.000.000 a 9.999.999.

Saremmo pure giunti allo stesso risultato per la seguente scorciatoia: se ci fosse stato chiesto con quale terna comincino i gruppi che abbiano l'1 come prima cifra (lo zero non essendo ammesso), avremmo subito risposto: «con il 100». Con ciò veniamo ad escludere automaticamente le 100 terne «matte» che cominciano con lo zero.

E qui l'implacabile mio contraddittore, che mi ha seguito con crescente diffidenza, salta su a chiedere la parola o meglio a insinuare questa malignità: «valeva la pena che tu sollevassi le montagne delle variazioni per partorire questo ridicolo topolino! Tu hai finito per ammettere, tanto per scaricare la tua coscienza, che il problema si risolve più facilmente senza tutta la combinatorica! Tu rimani fedele al principio di certi alpinisti rompicollo: perchè la via più facile, la «via delle vacche», quando si può raggiungere la meta per vie più difficili?».

Ma, caro il mio contraddittore, la via solita non è poi tanto facile! io ho voluto ricavare qualche insegnamento dal mio lungo pellegrinaggio: ho seguito la strada sinuosa della conoscenza. Difatti ho eseguito niente di meno che la verifica del sistema numerico attraverso alle combinazioni e quella delle combinazioni applicate al sistema numerico decimale. Il quale si è dimostrato un perfetto sistema di variazioni a ripetizione illimitata. L'algoritmo decadico o decimale, se ella preferisce chiamarlo così, e l'algoritmo delle combinazioni, ingranano perfettamente l'uno con l'altro, senza stridere.

Ora ci capacitiamo del significato delle parole e della differenza che corre fra numero considerato come «grandezza» oppure come semplice «indice», come numero «ordinale».

Allora facciamo una nuova avanzata: i nuovi compiti ai quali ci accingeremo, richiederanno una maggior ge-

neralità del nostro pensiero, e perciò nuovi algoritmi. Ed i demoni della matematica che abbiamo incominciato a svegliare non ci daranno pace, finchè non saremo in possesso di sempre nuovi segni magici della « vera cabala », mediante i quali crediamo di poter schiudere e sottomettere il mondo dell'invisibile.

Capitolo VIII

PRIMI PASSI NELL'ALGEBRA

Abbiamo avuto occasione fin quì di sentire, non una volta sola, ma forse dieci volte, se non più e di sentire quasi dolorosamente la nostra incapacità ad elevarci ad una più grande generalità di concetti. Ci eravamo imposti dei vincoli severi; imposto il divieto di abbandonare o di trascendere il campo dei numeri naturali. Eppure l'ombra degli algoritmi superiori ci seguiva passo passo. In un punto in cui non ci era stato più possibile di arginare il nostro bisogno di espressione abbiamo trasgredito in modo sornione al divieto, con un delitto particolarmente grave. Per raggiungere una validità più generale abbiamo eseguito un'operazione non con i numeri naturali, ma – orrore – con delle parole. Abbiamo detto.

$$\text{Dividendo: divisore} = \text{quoziente}$$
$$\text{Divisore} \times \text{quoziente} = \text{dividendo}$$

Quale sia la gravità del peccato commesso lo potremo vedere solo più avanti e siamo ricaduti nella trasgressione quando abbiamo espresso l'operatore euleriano della analisi combinatoria anzichè in cifre, in parole scrivendo: numero di elementi.

Invece di pentircene facciamo come ci dice Goethe « ciascuno può errare, ma il modo in cui ciascuno porta la conseguenza del suo errore contraddistingue la mente

elevata da quella comune ». Cerchiamo di mettere il nostro errore al servizio della « mente elevata ».

Per questo è necessario tuttavia di tenerci strettamente alle nostre promesse. A queste promesse appartiene in prima linea il patto d'incominciare con le cose più semplici e concrete.

Immaginiamo di dover misurare la superficie di una camera per comprare un tappeto da stendere sul pavimento. La camera non è grande: cinque metri per quattro; senza stare a confonderci noi affermiamo che l'area della superficie da coprire è di venti metri quadrati, poichè possiamo stendere tanto cinque striscie da un metro e lunghe quattro, quanto quattro striscie lunghe cinque metri. Sul nostro taccuino possiamo annotare $5 \times 4 = 20$ oppure $4 \times 5 = 20$ oppure semplicemente 5×4. E sta bene; se dovessimo misurare un'altra camera che è 6×8, noi eseguiremo di nuovo una moltiplicazione che ci darebbe 48 metri quadrati e così via. (1).

Un momento. Che cosa vuol dire questo: « e così via »?

Null'altro di qualunque altro « e così via » della matematica. Vuol dire che ogni ulteriore calcolo va condotto secondo lo stesso schema. Ma cos'è questo schema? Nient'altro che un comando di maggiore generalità. Nel caso specifico significa: « quando vuoi ottenere l'area di un rettangolo moltiplica la lunghezza per la larghezza ». Ma quale lunghezza e quale larghezza? chiediamo noi? Eh già, quella data lunghezza per la rispettiva larghezza. O se volete, moltiplicate la larghezza per quella data lunghezza; perchè è indifferente invertire i fattori o come si dice, commutarli.

Ciascuno di voi mi dirà: « vedo dove vuoi giungere: ad una formola: Precisamente, alla formola per calcolare l'area del rettangolo ».

---

(1) La definizione « prodotto di due lunghezze è il rettangolo da esse compreso » è di Euclide. La parola « prodotti » in questo senso è dovuta ad Erone matematico del II secolo A. C.

Proprio così: e la formola si scrive abitualmente $A = a.\ b.$ $A =$ area; a, lunghezza o larghezza; b, larghezza o lunghezza. Che cosa abbiamo dunque combinato? Abbiamo espresso l'Algoritmo e l'operatore a parole, anzi stenograficamente, con semplici lettere. (1).

Prima d'andare oltre, facciamo un altro esempio: Penso che a tutti sia evidente che una mela più due mele facciano tre mele. Ma quattro mele e tre pere danno invece sette frutti oppure una nuova unità: un « giardinetto » di frutta. Parimente, 5 volte tre mele dà 15 mele e 6 pere divise fra tre di noi dà due pere per ciascuno: se io stenograficamente scrivo « m » per mele « p » per pere e « f » per frutta e « g » per piatto o giardinetto di frutta, posso notare giù:

$$1m + 2m = 3m \qquad 4m + 3p = 7f = 1g$$
$$5 \times 3m = 15m \qquad 6p : 3 = 2p.$$

Questo sembra proprio un nuovo algoritmo, una nuova macchinetta per pensare e calcolare!

Allora procediamo e poniamoci un nuovo quesito: Quante unità devo aggiungere a 28 per ottenere un numero tre volte più grande del numero di unità che si cercano? Questo numero che si deve aggiungere a 28 non è ancora conosciuto. Lo chiameremo l'incognito o meglio l'incognita. Il genere femminile gli darà un più fascinoso mistero. E come nei romanzi gialli, e nella vita comune, la chiameremo: « l'incognita X » e così la scriveremo nei nostri calcoli.

Devo dunque aggiungere questo x a 28. Ho così eseguito la prima parte del comando. Ora questa somma deve essere eguale a tre volte la incognita: a nostra

(1) Citiamo qui le parole stesse del nostro Lagrangia «oggetto dell'algebra non è di trovare i valori stessi delle quantità cercate ma il sistema di operazioni da eseguire sulla quantità data per dedurre i valori delle quantità che si cercano, secondo le condizioni del problema. Il quadro di queste operazioni, rappresentato dai simboli algebrici è quello che in algebra si chiama: una formola.

sorpresa ecco che improvvisamente il segno = si tramuta per noi in un comando, in un operatore e ci dice di porre $x \times 28 = 3x$.

E ora? E ora cercheremo la incognita fino a che l'avremo trovata cioè finchè avremo soddisfatto all'eguaglianza scritta e troviamo che $x = 14$ la soddisfa e la tramuta in una identità $42 = 42$.

Ma non indugiamo su questo. Osserviamo solo che questa eguaglianza di termini, questa macchinetta che ci permette di eguagliarli si chiama una « equazione » Per risolverla dobbiamo seguire certe regole che diremo e che sono come le istruzioni per adoperare una macchinetta. Non vogliamo qui ed ora distinguere, guardare indietro e pensare alla parentela che può avere questa equazione con la relazione per le mele e le pere. Assodiamo provvisoriamente questo, solamente: noi abbiamo d'un tratto abbandonato, per così dire, i nostri nudi numeri naturali ed abbiamo accoppiato delle lettere alle cifre e questi nuovi simboli li abbiamo collegati con i segni già a noi noti, della somma, moltiplicazione, divisione e dell'eguaglianza. Noi applichiamo la nostra arte algoritmica, la nostra « vera Cabala » non solo a cifre, ma a cose qualsiasi e non solo a cose note, ma persino a cose incognite. E il bello si è che non sappiamo neppure ciò che queste « cose » significano. La lettera *a* può significare ora la lunghezza di una camera, ora un'albicocca. Ma non sarà nè una cosa nè l'altra, sarà semplicemente un *a*. Poichè *a* 4 volte vorrà dire semplicemente a + a + a + a: quattro *a*. Cioè « qualcosa ». Vale a dire: qualcosa a cui si richiede di mantenere la propria identità durante tutte le operazioni di calcolo, pure rimanendo indeterminata. E la nostra incognita? Peggio che mai, è un qualcosa non solo d'indeterminato ma di ignorato o meglio di ignoto. È la soluzione cercata di un enigma matematico che può richiedere delle operazioni più o meno complicate.

Ad ogni modo abbiamo introdotto una comoda espressione di concetti, ai simboli scritti della quale corrispondono delle « cose » o delle grandezze del tutto nebulose, caotiche, senza forma. Niente affatto « create da Dio » come i numeri naturali. E oltre a tutto il resto non ancora univoche. Dappoichè questi simboli non sono univoci, poichè rappresentano per così dire una procura generale, una cambiale in bianco; nella quale posso scrivere quella somma che mi pare e piace. (ad esclusione della x che il creditore non mi riconoscerebbe).

Permettetemi di darvi uno schizzo di questi simboli che rappresentano relazioni affatto generali, valide per qualunque caso.

$A = a \times b$ non è solo l'area del pavimento della mia camera, ma di un rettangolo. Non solo, ma è l'area di un qualunque rettangolo. E così $3m + 2m = 5m$ non è solo la somma di $3 + 5$ mele, ma di qualunque « cosa » che io possa rappresentare con m : milioni, metri, marenghi. Nè le cose devono avere per iniziale la *m* : la quale può voler rappresentare: soldati, locomotive o che so io, cose concrete; qualunque cosa *concreta*, perchè non posso evidentemente scrivere: 3 pensieri + 5 pensieri = 8 pensieri. Non avrebbe senso. Ecco dunque come la « vera Cabala » ci fornisce un modo di scrivere un nuovo segno magico. Il simbolo del calcolo generale o dell'Algebra. Più precisamente entriamo in possesso di numeri generali e generici i quali si distinguono dai numeri naturali o concreti per una loro indeterminatezza provvisoria. Prima però di indagare in questa nuova grande magica, in questa « ars magna » o « artium ars » come la si è anche chiamata, spendiamo due parole per dire com'è nata e perchè si chiami *algebra*. Lo stesso matematico arabo Alchwarizmi, che tenne a battesimo la parola algoritmo e di cui già abbiamo fatto la conoscenza, aveva compilato un trattato intitolato: L'Al'djebr ou al'moukabalah ». In esso dava certe istruzioni o re-

gole per risolvere delle operazioni, che qui non specificheremo. Assodiamo semplicemente che per un singolare caso il nome del signor Alchwarizmi è passato alla storia per una doppia denominazione che è giunta a noi un po' ammansita: di Algoritmo e di Algebra.

Tuttavia l'occidente medioevale non ha ricevuto pari pari dall'oriente una scienza perfetta e completa, un sistema chiuso di calcolo letterale. Un lungo lavoro di sviluppo, che partendo dagli antichi indi, attraverso agli arabi, per Leonardo Pisano e Francesco Vieta, (1) (padre dell'Algebra moderna) fino a Cartesio e Hudde (2) ha presieduto al perfezionamento progressivo di questa « grande Arte ». Fino a che, verso la fine del secolo XVII° con Eulero e Lagrange, essa ha raggiunto una generalità ed una completezza che lasciava poco ancora da scoprire.

Torneremo sulla storia dell'Algebra alla quale non abbiamo dedicato qui che un accenno di sfuggita.

È ora vi prego di non lasciarvi spaventare da qualche considerazione filosofica che dovremmo fare assieme. La loro vera difficoltà sarà assai minore di certe trasposizioni da un sistema di numerazione in un altro. Non vogliamo insomma accontentarci delle regole meccaniche di calcolo, ma vogliamo penetrare a fondo nella costituzione interna e nello spirito dell'Algebra.

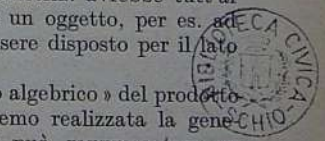
---

(1) Vieta (1540-1603) fu il primo che si occupò della risoluzione di operazioni numeriche di grado qualunque.
(2) Matematico olandese (1640-1704.

Capitolo IX

NOTAZIONE ALGEBRICA

Ritorniamo per un momento sulla questione della superficie del pavimento della nostra camera e del relativo tappeto: unicamente per fare un passo innanzi verso una maggiore generalizzazione; dimenticando l'oggetto in questione e tenendo presente solo la forma. D'ora innanzi parleremo di rettangolo come di «forma geometrica» a sè, caratterizzata dall'aver due lati disuguali e quattro angoli retti ai vertici. Per questa forma vale l'espressione trovata $A = a \cdot b$, dove a per esempio sarà il lato maggiore e b il lato minore, o larghezza del rettangolo. Il dire che il rettangolo è più lungo che largo non ha alcun senso in geometria: avrebbe tutt'al più un significato se riferito ad un oggetto, per es. ad un mobile che può, putacaso, essere disposto per il lato più lungo contro al muro.



E ora parliamo del «significato algebrico» del prodotto $a \cdot b$: lo otteremo tostochè avremo realizzata la generalità di questa formola. La a può rappresentare un numero qualunque, dallo zero all'infinito purchè risponda alla condizione ausiliaria di essere maggiore di b, il quale b può ugualmente rappresentare un numero qualunque. Si può per es. pensare tanto al rettangolo 2×1 quanto al rettangolo 1.994×373; in entrambi i casi il risultato della moltiplicazione esprimerà un'area in unità quadratiche dell'unità lineare adottata per la misura, per es. in metri quadrati se l'unità lineare è il metro, in centimetri quadrati se l'unità lineare è il centimetro e così via.

Proviamo la validità del nostro algoritmo andando ai limiti; facciamo in modo che, fermo restando il lato a,

si faccia crescere b cioè la larghezza, oppure la si faccia diminuire via via. Si avranno così i due casi limiti; tra i quali vengono a trovarsi tutti i possibili casi normali. Può intanto darsi il caso particolare che la larghezza b risulti uguali alla lunghezza: il rettangolo si trasforma in quadrato. Questo si esprime scrivendo $a = b$ ed $A = a \cdot a = a^2$; volgarmente si chiama questa operazione, fare il quadrato di a. Data la condizione che ci siamo imposta, che b non sia maggiore di a, siamo qui arrivati al caso limite superiore.

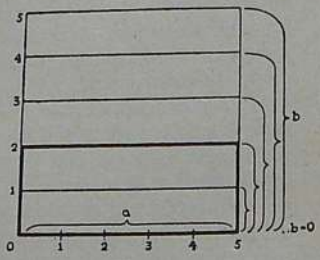


Fig. 2

Facciamo ora diminuire b prendendone successivamente la metà, il terzo, il decimo, il centesimo: osserviamo intanto che noi procediamo per salti perchè abbiamo assunto come divisore la serie dei numeri naturali: dove ci fermeremo? allo zero? che cosa vorrebbe dire lato b = zero? oppure area $A = a \times 0$? Cioè area nulla? Sul disegno, geometricamente, non rimane della superficie $a \cdot b$ che una linea a senza dimensioni trasversali. Così con la nostra formola, al limite inferiore giungiamo ad una forma geometrica diversa dalla superficie; cioè alla «*linea*» la quale non ha estensione se non nel senso della sua lunghezza. Questa è davvero una stupefacente prova del fuoco del nostro algoritmo ed un buon esempio del perfetto giuoco reciproco di più algoritmi, di quello algebrico e di quello dei numeri puri. La nostra macchinetta calcolatrice funziona dunque a perfezione.

Arrischiamoci allora in un problema più difficile e poniamo una seconda condizione: che la lunghezza del nostro rettangolo stia sempre in un certo rapporto con

la larghezza: per es. nel rapporto di 5 a 2: questo rapporto non varia qualunque sieno le cose che il numero 5 e il numero 2 rappresentano, sieno essi millimetri, centimetri, metri. Per questo il rapporto 5/2 si dice un « numero puro ». Sarà poi sempre $A = a \cdot b = 5 \cdot 2 = 10$ cioè l'area del nostro rettangolo sarà sempre dieci volte il quadrato dell'unità di misura adottata.

Rappresentiamo ora graficamente il rettangolo in diverse unità di misura (fig. 3). L'area di ciascuno dei rettangoli, misurata nella sua particolare unità, sarà dieci volte il quadrato dell'unità stessa.

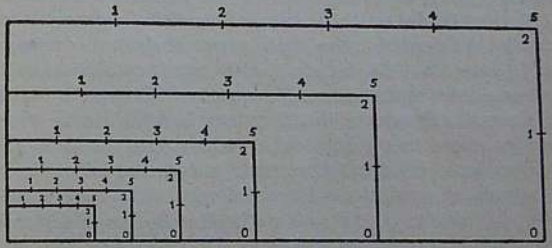


Fig. 3

E ora facciamo l'ultimo salto, al limite inferiore. Quale sarà il più piccolo rettangolo? quello che ha per larghezza $b = 0$ e per lunghezza $a = 0$, cioè area zero. Che cosa vuol dire area zero? Nessuna estensione, superficie ridotta ad un punto geometrico: ma allora dove se ne va la nostra condizione di un rapporto di 5 a 2 fra i lati? Siccome questa condizione stabilisce quello che si chiama l'« invarianza della forma » cioè la conservazione della struttura del rettangolo, possiamo qui ricordare un principio di Euclide: che il rapporto di due grandezze è indipendente dal loro valore assoluto (e non solo del genere di grandezza delle cose rappresentate dai numeri stessi). In base a questo principio possiamo

affermare che anche nel nostro punto senza dimensioni, deve ancora sussistere il rapporto 5 a 2 fra la non più esistente lunghezza e la non più esistente larghezza. Se no tutto il nostro algoritmo va per aria.

Siamo giunti ad un passaggio vertiginoso della nostra ascensione, ma da bravi rocciatori lo supereremo.

Facciamo ancora credito alla vera cabala e scriviamo la nostra condizione come proporzione: a sta a b come 5 a 2, ossia in formola $a : b = 5 : 2$, scrittura questa che s'impara nelle elementari. Ma al limite, che cosa mi vuol dire $0 : 0 = 5 : 2$? Anzitutto 0 via 0 non può essere eguale ad 1 perchè zero non è un numero o meglio è il simbolo del nulla. I non matematici si cavano d'impiccio dichiarando che $0 : 0$ rappresenta un «*numero indeterminato*». La divisione di 0 per 0 conduce difatti ad una indeterminazione. Ma questo è altamente insoddisfacente. Proviamo di affrontare la difficoltà in altro modo: esiste una regola delle proporzioni che dice che «il prodotto dei termini estremi (nel nostro caso 0 e 2) è uguale al prodotto dei termini medi (nel caso nostro 0 e 5) Allora: $0 \times 2 = 0$ e $0 \times 5 = 0$ $0 = 0$ Giusto? Facciamo ancora un esempio: $10 : 4 = 5 : 2$ da cui $10 \times 2 = 4 \times 5 = 20$. Ma questo non risolve ancora il nostro dubbio. Potremmo verificare ancora la esattezza della nostra proporzione $0 : 0 = 5 : 2$ scrivendo algebricamente: $(5 \times 0) : (2 \times 0) = (5 \times 1) : (2 \times 1)$ che dà ancora

$$0 : 0 = 5 : 2$$

Sono autorizzato a scrivere così perchè, stante la premessa fatta, posso moltiplicare i due termini della proporzione per quel numero che a me piace, senza che il rapporto cambi.

Se il lettore non si capacita lo rimandiamo al calcolo differenziale, trattato più avanti, dove troverà un metodo (dovuto a l'Hopital) per trattare questi casi d'inde-

terminazione e che forse è più persuasivo di questa ultima prova.

In un momento in cui ancora non abbiamo appreso la più semplice regola dell'algebra siamo volutamente penetrati fin nei fondamenti della matematica superiore, nell'analisi infinitesimale, seguendo all'incirca quel che dice il titolo di un famoso libro del Leibnitz: « Introduzione nel calcolo differenziale dall'ordinario calcolo algebrico ».

Non abbiamo però ancora risolta la quistione se sia meglio cadere nella padella o nella brace: sappiamo soltanto che dovremo far la scelta fra il dover ammettere qualche cosa che non riusciamo a rappresentare alla mente, in quanto dovremmo pensare un punto senza dimensioni come un rettangolo piccolissimo i cui lati stanno fra di loro in un dato rapporto, oppure rinunciare a credere nella sicurezza del calcolo con le proporzioni. Eppurtuttavia la pazzesca ipotesi dei due zeri di valore diverso in quanto rappresentano il limite di lati di diverse dimensioni, ci disturba assai meno che la rigida negazione di una simile possibilità. Non era cosa ben più assurda quel nostro affermare che tre albicocche più cinque banane fanno otto frutti, oppure un giardinetto di frutta? $3a + 5b = 8f$ oppure $= 1g$?

Ora è una verità incontrovertibile in matematica che due grandezze eguali ad una terza sono eguali fra di loro: quindi dobbiamo concluderne che 8 frutti equivalgono ad un giardinetto di frutta. Anche questa conclusione non è problematica in quanto avevamo veramente premesso, sommando tre albicocche con cinque banane di voler giungere ad un nuovo concetto: di frutta o di giardinetto o piatto di frutta; concetto preciso se pur composito. Più misteriosa appare la nostra affermazione che tre albicocche più cinque banane sommano in otto frutti quantunque, a prima vista, sembri più evidente della conclusione ad un piatto di frutta. Ma essa porta

ad una conseguenza importante: se veramente $3a+5b=8f$ io ho in un certo senso, introducendo il concetto più generale di frutto, stabilita una eguaglianza fra cose diverse: albicocche e banane. Appena io mi metto a calcolare in termini di frutti, non ho proprio più bisogno di distinguere le albicocche dalle banane nè di calcolare in *a* più *b*: scrivo semplicemente $3 + 5 = 8$ e non mi preoccupo di accompagnare queste cifre con un nome. In altre parole, non calcolo più con cose o con lettere che le rappresentino, mà con pure cifre, con coefficienti.

Da questa considerazione deriva un concetto assai generale dell'algebra, il quale serve a collegare fra di loro tutti quelli fin qui esaminati.

È noto che una grandezza moltiplicata per l'unità, rimane eguale a sè stessa: perciò posso, per comprendere anche il calcolo numerico come caso speciale dell'Algebra, considerare tutti i numeri possibili, semplicemente come coefficienti, mentre al posto delle lettere (o delle mele, o albicocche, o dei lati) posso scrivere o immaginare ovunque scritta l'unità. 5 unità più 17 unità daranno 22 unità o più brevemente $5 + 17 = 22$.

Tutti i calcoli con numeri senza denominazione (mele, lati, ecc.) in qualunque sistema numerico, sono operazioni di numeri denominati dall'unità: operazioni cioè di coefficienti dell'unità.

Con ciò stabiliamo una magnifica ininterrotta concatenazione, un trapasso continuo e costante dal sistema dei numeri all'Algebra.

Notiamo ancora che la moltplicazione con l'unità come moltiplicatore dà come prodotto il moltiplicando: tutti i sistemi numerici sono cioè « invarianti » rispetto alla moltiplicazione con l'unità.

Ciò premesso, non esiste più difficoltà di sorta per penetrare più addentro nell'algebra.

Mi si domanda: dobbiamo sempre calcolare con numeri e lettere, promiscuamente, oppure come prima cal-

colavamo sempre con numeri, dovremo noi ora calcolare sempre con lettere?

Domanda giustificatissima, che esamineremo subito. Circoscriveremo il quesito come: « problema dei coefficienti generali e concreti ».

Che cosa sieno i « coefficienti concreti » l'abbiamo già mostrato in più di un'occasione. « Grosso modo » sono la designazione quantitativa di una grandezza o di una unità. In 5a, 5 è il coefficiente ed a la grandezza o unità sulla quale eseguisco il calcolo.

Nell'espressione $5a + 7b + 3c + 8d \ldots$ $5, 7, 3, 8 \ldots$ sono i coefficienti concreti delle grandezze generali $a\ b\ c\ d$ di cui mi servo. I coefficienti devono rimanere costanti durante tutti i calcoli che eseguisco sulle grandezze sulle quali opero, di qui il nome di « costanti » che si dà ad essi. C'è poi l'intesa di considerare *costanti* tutte le grandezze che si esprimono con lettere minuscole dall'a all'u compresa, riservando le ultime lettere dell'alfabeto x, y, z per designare le « variabili ». Le lettere minuscole r, s, t, designando per lo più: un raggio r, uno spazio s od un tempo t, – quantità per lo più variabili – occupano una posizione intermedia in questa nomenclatura.

Tuttavia anche fra le prime lettere dell'alfabeto ce ne sono di quelle che hanno un significato particolare. La lettera e, da Eulero e Lagrange in qua, stà a designare quasi esclusivamente la « base dei logaritmi naturali »; la lettera i o j da Gauss in qua, stà per indicare un « *numero immaginario* » (che impareremo a conoscere più avanti) mentre la lettera h nella matematica superiore sta per indicare un « incremento infinitesimo ». Anche l'uso della lettera d come costante va evitato nel calcolo superiore per non creare confusioni col simbolo d o δ di operatore differenziale.

E poichè per un lungo calcolo algebrico disponiamo, per designare delle costanti, delle sole lettere

a b c f g k l m n o p q

e questa serie, interrotta ed incompleta, urta con l'eleganza e la chiarezza della scrittura, si adopera nell'algebra moderna – per suggerimento del Leibnitz stesso – la notazione letterale con «indici», usando sempre una stessa minuscola.

$$a_1 \; a_2 \; a_3 \ldots a_n .$$

Come esempio: un qualunque numero del sistema decimale si può scrivere, partendo dall'indice zero:

$$a_0 10^0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 + a_3 10^3 \ldots$$

Il mio contraddittore, che stavolta ho provocato appositamente, interrompe e insinua che io qui adopero come coefficienti le lettere mentre mi servo di numeri per designare le unità.

È vero. E vedremo anche come possiamo addirittura fare a meno dei numeri. Ma per chiudere la bocca all'egregio contraddittore, dobbiamo dargli una risposta esauriente, perchè io lo vedo ancora gesticolare, pronto a interrompere di nuovo. Anzitutto: $a_0, a_1, a_2, \ldots$ significa solo che a questo loro posto e nell'ordine indicato dagli indici, si possono scrivere cifre: per es. una qualunque, dallo zero al 9 del sistema decimale. Ma poichè un numero non può, come sappiamo, incominciare con uno zero, dinanzi alla potenza più elevata del 10 non possiamo mettere uno zero. Così con $a_0 = 5$, $a_1 = 6$, $a_2 = 0$, $a_3 = 9$ possiamo formare, con la formola quì sopra, il numero 9065 ma non potremmo scrivere $a_0 = 5$, $a_1 = 6$, $a_2 = 9$ e $a_3 = 0$, cioè 0965, non è vero?

Ma posso usare un'altra malizia e invece di incominciare da zero con gli indici, incominciare con uno: in questo caso gli esponenti delle potenze saranno di una unità inferiori agli indici, ma questi ultimi mi daranno senz'altro il numero delle cifre di cui il numero è composto: così se

$$a_1 = 5,\ a_2 = 6,\ a_3 = 0,\ a_4 = 9$$

so che avrò un numero di quattro cifre e precisamente 9065: d'altra parte, l'esponente mi dà, come già sappiamo, il numero degli zeri prima o dopo la virgola.

Capitolo X

OPERAZIONI ALGEBRICHE

Conosciamo ormai abbastanza algebra da poterci occupare delle sue regole di calcolo: è chiaro anzitutto che non potremo senz'altro applicare alle lettere l'algoritmo dei sistemi a cifre; non possiamo per es. nè creare veri sistemi a valori ordinali, perchè tutto deve rimanere generale ed indefinito, nè pure possiamo sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere nel modo del calcolo numerico. Questo perchè l'algoritmo del sistema decimale dipende sostanzialmente dalla classificazione per ordine di grandezza.

Vediamo dunque, tenendo presenti agli occhi della mente le nostre albicocche *a*, le banane *b* ecc., di ricercare insieme anzitutto i modi fondamentali del calcolo algebrico eppoi cerchiamo, con sagacia, di guardarci un po' dentro.

$a + b$ vuol dire che io debbo sommare fra di loro due grandezze costanti di qualunque specie, diverse fra di loro: per indicare che esse sono diverse ho scelto appunto lettere diverse per esprimerle. Che cosa devo incominciare a fare? $a + b$ rimane quel che è se con ciò devo solo indicare il calcolo da eseguirsi: tutt'al più posso scrivere $a + b = b + a$ per significare che l'addizione gode della proprietà commutativa: così sarà evidentemente $a + b + c + d = a + b + d + c$ oppure $= a + + c + b + d$ e così via, oppure sarà $a + a = 2a$. Questo

lo sapevamo già: e sarà pure $a + a + a + b + b + b + b + c + c + d = 3a + 4b + 2c + d$ (il coefficiente 1 dell'ultimo termine non si scrive). Se adoperiamo gli indici, evitando così le lettere non ammesse, avremmo per l'ultima espressione la forma:

$$a_1 + a_1 + a_1 + a_2 + a_2 + a_2 + a_3 + a_3 + a_4 = \\ = 3a_1 + 4a_2 + 2a_3 + a_4$$

Ora, presentandosi due espressioni algebriche da sommare, come:

$$3a + 27b + 10c + d + 15e + 8f$$
e
$$7a + 0b + 9c + 13d + 6e + 101f$$

sommando termine per termine, si ha:

$$10a + 27b + 19c + 14d + 21e + 109f$$

Come si vede non si fa che sommare i coefficienti (senza tener conto della loro posizione numerale) e si stabilisce una specie di schema di addizione nel quale si sono unite col segno + le due espressioni polinomie poi si sono raccolti (in colonna o fra parentesi) i termini della stessa specie, cioè aventi comuni le lettere, che si sono poi sommati fra di loro. Questo equivale a fare le operazioni seguenti:

$$3a + 27b + 10c + d + 15e + 8f + 7a + 0b + 9c + \\ + 13d + 6e + 101f = (3 + 7)a + (27 + 0)b + (10 + 9)c \\ + (1 + 13)d + (15 + 6)e + (8 + 101)f$$

Naturalmente non si potranno sommare tra di loro grandezze rappresentate con lettere od indici od esponenti diversi ,come non si possono sommare albicocche con banane e con ciliege. Possiamo per contro sempre rappresentare la somma da eseguirsi, come:

$$a_1 + a_2 = a_2 + a_1 \text{ o } a_2 + a_1 = a_1 + a_2$$

analogamente possiamo sempre scrivere:

$$a^2 + a^\circ + a^3 = a^\circ + a^2 + a^3 = a^3 + a^2 + a^\circ$$

ordinando secondo le potenze crescenti oppure secondo le potenze decrescenti di a (e vedremo come questo ordinamento sia utile) oppure permutando in modo qualsiasi i tre termini. La somma rimane sempre quella.

La sottrazione per contro ha una limitazione in quanto si può procedere in un senso solo: a — b non può essere null'altro che a — b e non sarà mai b — a. E così sarà 2a — 6b + 7c — a + 4b — 2c null'altro che 2a — a — — 6b + 4b + 7c — 2c o tutt'al più

$$(2 - 1)a + (4 - 6)\,b + (7 - 2)c$$

Qui, a proposito del secondo termine ora scritto, ci troviamo d'un tratto imbarazzati: abbiamo scritto, provvisoriamente fra parentesi 4 — 6 e non 6 — 4 per causa di quel segno meno che porta il 6: ma non possiamo sottrarre 6 banane da 4 banane (a meno che ce ne facciamo prestare due dalla donna della pancarella vicina). Ma allora ci tocca tenere una contabilità di dare e di avere. Un negoziante che possiede 100 mila lire può ben spenderne 120 mila e registrare l'operazione nei suoi libri. Ma qui nelle operazioni algebriche come fare quando il minuendo è più piccolo del sottrattore? Ci risulterebbe un valore negativo. E sia: questo valore negativo $4 - 6 = -2$ è perfettamente ammissibile in algebra; allora scriveremo come risultato della sottrazione qui sopra

$$(2 - 1)a - (6 - 4)b + (7 - 2)c = a - 2b + 5c$$

E così siamo giunti al concetto dei «numeri negativi» che considereremo come cose altrettanto concrete quanto i numeri positivi (non è un debito altrettanto concreto che un credito? a meno che siamo dei farabutti matricolati).

Rappresentiamo questi numeri come tanti segmenti eguali o divisioni su di una retta indefinita: vuol dire che a partire da un certo punto, sul quale segneremo zero, porteremo i segmenti positivi verso destra e i ne-

gativi verso sinistra, numerandoli progressivamente come se volessimo graduare un termometro in gradi centesimali, sopra e sotto lo zero.

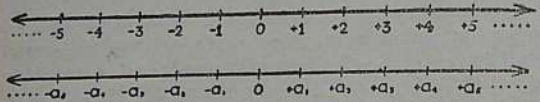


Fig. 4

Lo zero non è un numero, sebbene sia rappresentato con la cifra zero in aritmetica (ricordate lo « zefiro » degli arabi) esso non rappresenta che il nulla o più precisamente un limite, una pietra di confine fra la regione dei numeri positivi e quella dei numeri negativi.

Di solito dinanzi ai numeri positivi non si usa mettere il segno più (+): il fatto che il numero non porta segno proprio, sta, per convenzione tacita, ad indicare che il numero è positivo. Eppoi vedete come è brutto quel segno + (nel Bollettino metereologico del Corriere della Sera le temperature sopra lo zero portano addirittura la croce mortuaria !).

I numeri negativi per contro vanno sempre muniti del loro segno.

Qualcosa di simile si fa con le operazioni di moltiplicazione e divisione: possiamo scrivere sì 3×4 oppure 3.a, ma possiamo anche tralasciare e punto e croce e scrivere semplicemente 3a (e così si fa di solito). Ma non possiamo mai tralasciare il segno di divisione: potremo tutt'al più scrivere a : b invece di $\frac{a}{b}$.

E ora introduciamo ancora il segno di parentesi per salire a considerazioni più alte. Le parentesi, che già abbiamo qualche volta adoperate senza commenti: – per esempio nel coefficiente binomio –, significano che tutto quanto è compreso fra di esse fa parte a sè stesso. E va quindi trattato come espressione indipendente.

Per es. nell'espressione:

$$10.000 - (5020 + 23 - 448)$$

posso prima sommare il contenuto fra parentesi che mi dà 4595, poi scrivere $10000 - 4595$.

Se io credessi di trascurare la parentesi ed eseguissi una dopo l'altra le operazioni $10.000 - 5020 + 23 - - 448$ otterrei un risultato sbagliato. Perchè?

Facciamo un altro esempio:

$$15.375 - 320 + \underbrace{(8220 - 26 + 400)}_{8594} = 15.055 + 8594 = 23.649$$

Se anche qui scrivessi sbadatamente $15.375 - 320 + + 8220 - 26 + 400$ otterrei, caso strano, lo stesso risultato 23.649, cioè il numero esatto. Che è successo? Si possono davvero trascurare le parentesi? Sì e no. Sì, se davanti alla parentesi c'è un segno $+$, no, se c'è il segno meno.

Per spiegare questo, penetriamo più profondamente nel significato dei numeri negativi. Attribuiamo a ciascun numero il suo segno $+$ e $-$ per distinguerli dal segno «operatore» $+$ e $-$, cioè dal comando: somma! o sottrai! Allora una somma $5 + 7$ si scriverebbe $(+5) + (+7)$, mentre una sottrazione come $12 - 7 = 5$ si scriverebbe $(+12) - (+7) = (+5)$.

Vedremo come in certi casi dubbi possa tornar comoda una scrittura così complicata per evitare di sbagliare nelle «operazioni» sui segni.

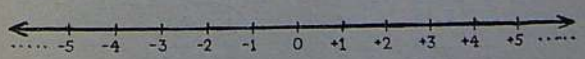


Fig. 5

Ora guardiamo un po' sulla linea dei numeri positivi e negativi che senso abbiano le due operazioni di somma e sottrazione, e ciò prima ancora di occuparci delle operazioni sui numeri negativi.

È chiaro che il comando di sommare, lungo questa linea, si può eseguire in varii modi. Se sommassi verso destra a partire dallo zero, cioè addizionassi numeri positivi, la somma mi trasporterebbe sempre più avanti, a destra. Se invece sommo verso sinistra a partire dallo zero, per es. $(-1)+(-2)$ avrò (-3) e così pure $(-3)+(-1)=(-4)$ mi darà un numero che avanza verso sinistra. Non ho fatto con questo che accumulare debito su debito. Con le sottrazioni che posso fare sia tutte a destra che tutte a sinistra dello zero, il senso di avanzamento sarà opposto: io torno sempre verso lo zero. Ma le cose cambiano se nelle mie operazioni oltrepasso lo zero: dovendo per es. sommare $(+3)$ con (-2). Per far questo devo passare dal campo dei numeri negativi in quello dei positivi attraversando lo zero.

Scriviamo ora, uno di seguito all'altro, i casi finora considerati, aggiungendone ancora altri: ciò per poterne ricavare qualche regola:

$$(+1)+(+2)=(+3) \qquad (+3)+(-2)=(+1)$$
$$(-3)+(-1)=(-4) \qquad (-3)+(+2)=(-1)$$
$$(+4)-(+3)=(+1) \qquad (+2)-(-1)=(+3)$$
$$(-4)-(-3)=(-1) \qquad (-2)-(+1)=(-3)$$

Considerando attentamente questo specchietto e cercando di vedere come possiamo sopprimere le parentesi, arriviamo a questo risultato:

$$+1+2=+3 \qquad +3-2=+1$$
$$-3-1=-4 \qquad -3+2=-1$$
$$+4-3=+1 \qquad +2+1=+3$$
$$-4+3=-1 \qquad -2-1=-3$$

che cosa significa tutto ciò? Null'altro che questo: che si può collegare, associare, il « comando » di operare, col segno proprio del numero, in modo meraviglioso. Così, la prima linea può stare com'è; basta togliere le paren-

tesi la cui soppressione non cambia nulla allo stato delle cose; ciò che si vede a prima vista. Dove invece il comando + o — sta davanti ad una parentesi che contiene un numero di segno opposto, è successo un cambiamento. Se comando e numero hanno uguale segno, risulta un +, se hanno segno disuguale risulta un —. E questa regola vale anche quando nella parentesi ci siano parecchi numeri, come:

$$20 - (3+5-7+6-9) = 20 - 3 - 5 + 7 - 6 + 9 = 22$$

Il segno meno di comando davanti alla parentesi ha cambiato di segno *tutti i numeri scritti in essa*.

Osserviamo espressamente che tutto questo è stato detto un po' di passata. Sarebbe stato più elegante di dire che anche il segno proprio del numero rappresenta un comando di spostarsi lungo la linea dei numeri di tante divisioni quante sono le unità che il numero contiene; e precisamente, nel senso corrispondente al segno: verso destra per il segno +, verso sinistra per il segno —. Questo ordine di spostamento può combinarsi con un comando + di sommare o — di sottrarre.

Ora, se facciamo totalmente astrazione dei numeri concreti e, senza nemmeno mettere giù dei numeri generici, ci limitiamo a cercare come agisce una combinazione di comandi simultanei, noi veniamo ad effettuare una operazione solamente con comandi, eseguiamo cioè un « calcolo simbolico ».

Per il momento non intendiamo penetrare molto più avanti in questo altissimo ramo della cabala. Ma desideriamo assodare una cosa, che noi eseguiamo una operazione elementarissima di calcolo simbolico quando affermiamo che eguali comandi di + o di — si combinano in un + mentre comandi disuguali si combinano in un — risultante.

E ora vediamo il caso di più parentesi una dentro l'altra. Supponiamo che si dia l'ordine di sottrarre da 6 l'espressione $(3 + 4 - 7 + 2)$ e che poi quel che ne ri-

sulta, vada sottratto da 15, che al nuovo risultato venga aggiunto ancora un 5 e che il totale si debba infine sottrarre da $23 - 7 + 6$. Tutto questo senza eseguire le operazioni ma indicandole solamente. Scriveremo

$$(23 - 7 + 6) - \{15 - [6 - (3 + 4 - 7 + 2)] + 5\} = ?$$

La regola dice che le parentesi, che possono essere tonde, quadre o a graffa, per meglio distinguere le une dalle altre, si risolvono nel miglior modo cominciando da quella più interna e procedendo via via verso le esterne. Si potrebbe in verità procedere anche dall'esterno verso l'interno ma è più facile fare errori.

Risolviamo quindi, nel caso nostro, ciò che si ha fra parentesi tonde: avremo

$$23 - 7 + 6 - \{15 - [6 - 3 - 4 + 7 - 2] + 5\} = ?$$

poi risolveremo quelle quadre:

$$23 - 7 + 6 - \{15 - 6 + 3 + 4 - 7 + 2 + 5\} = ?$$

e infine quelle a graffa

$$23 - 7 + 6 - 15 + 6 - 3 - 4 + 7 - 2 - 5 = 6$$

risultato che avremmo ottenuto anche calcolando a parte il contenuto delle singole parentesi. Tutto quello che sta prima delle parentesi dà 22, quello che sta fra parentesi vale 16: la differenza è 6.

Nella risoluzione delle parentesi abbiamo notato che certe cifre singole hanno cambiato più volte il loro segno, finchè nell'espressione finale, esente da parentesi, hanno acquistato il segno definitivo. Questi cambiamenti rappresentano una moltiplicazione di comandi (ordini e contrordini) che vedremo meglio più avanti.

Sarebbe ormai l'ora di ritornare alla nostra Algebra che avevamo trascurata per spiegare la sottrazione. Oramai su questa operazione non si hanno più dubbi. Ed io penso che possiamo « bruciare le tappe » e proce-

dere senza fermarci a nuove considerazioni cammin facendo. Scriviamo ora senza commenti:

$$\begin{aligned} &15a - \{6a+[3b+5c-2a]+[3c-(5a+7b)]+c\} = \\ =&15a - \{6a+[3b+5c-2a]+[3c-5a-7b]+c\} = \\ =&15a - \{6a+3b+5c-2a+3c-5a-7b+c\} = \\ =&15a - 6a - 3b - 5c + 2a - 3c + 5a + 7b - c = \\ =&16a + 4b - 9c. \end{aligned}$$

Come si può notare, in Algebra è possibile un certo calcolo con le quantità tra parentesi, solo quando tra esse si trovano più grandezze della stessa specie: più a, più b, più c. Così come in:

$$17a - [6b + (9a - 3b + c + 5a - 2c + b) + 2b] = ?$$

Qui potremmo, prima di risolvere le parentesi, scrivere:

$$17a - [8b + (14a - 2b - c)]$$

cioè raccogliere come si dice «a fattore comune» le grandezze di eguale specie. Così sarà più facile risolvere le parentesi:

$$\begin{aligned} &17a - [8b + (14a - 2b - c)] = \\ =&\ 17a - 6b - 14a + c = 3a - 6b + c. \end{aligned}$$

Già per tutto il tempo che procedevamo in queste operazioni, io avevo sulla lingua di dirvi che in Algebra addizioni e sottrazioni sono una stessa cosa che chiameremo «somma algebrica». Questo risulta dall'aver appreso a conoscere il valore dei segni e a rispettarli. Da un certo punto di vista non esiste dunque sottrazione in Algebra, ma solo una somma di numeri positivi e negativi. Possiamo poi scambiare comunque i numeri sommandi, anche di segno. Per es. è lo stesso scrivere:

$$\begin{aligned} &-(-5)-(+3)-(+2)-(-4) \\ \text{o}\quad &+(-2)+(+5)+(+4)+(-3) \end{aligned}$$

il risultato è sempre $+4$.

E poichè siamo già un bel pezzo avanti nella generalizzazione delle nostre concezioni, vogliamo mettere accanto al principio della permutabilità anche quello della «distributività» che è caratteristico della moltiplicazione. Noi affermiamo cioè che:

$$5\,(7 + 4 - 3 + 9) \text{ è uguale a } 5 \cdot 7 + 4 \cdot 5 - 3 \cdot 5 + 9 \cdot 5 = \\ = 35 + 20 - 15 + 45 = 85$$

in lettere si ha:

$$a\,(b + c - d + e - f) = a\,b + a\,c - a\,d + a\,e - a\,f$$

ciò che in questo esempio generale non possiamo verificare se non sostituendo numeri concreti alle lettere.

Per rendere più evidente il principio fondamentale, serviamoci di una dimostrazione geometrica, già usata da Euclide. Scriviamo per il momento, fra parentesi, soli numeri positivi:

$$a\,(b + c + d + e + f) = a\,b + a\,c + a\,d + a\,e + a\,f$$

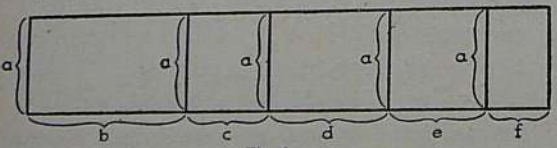


Fig. 6

Le superfici dei cinque rettangoli che abbiamo allineati, seguono la formola già adoperata per il tappeto: ab, ac,... La somma di tutti i rettangoli, cioè ab + ac + + ad + ae + af non è altro che l'area totale. Se volessimo esprimerla direttamente, dovremmo moltiplicarne la lunghezza, cioè (b + c + d + e + f) per la larghezza *a*; cioè eseguire l'operazione proposta qui sopra. Siccome le due operazioni, quella indicata dal primo membro e quella indicata dal secondo, danno la stessa area totale, resta evidentemente dimostrata la eguaglianza algebrica scritta.

Lascio al lettore che volesse divertircisi, di rendere negativi alcuni dei numeri per verificare il principio anche in questo caso. Vedrà che i rettangoli positivi giacciono l'uno accanto all'altro, quelli negativi giacciono invece sopra quelli precedenti, essendo il lato « lunghezza » portato in senso opposto. Egli potrà capacitarsi di avere la stessa area che otterrebbe se, tenendo invece ferma la larghezza a, portasse le diverse lunghezze parziali ora in un senso ora nell'altro, secondochè abbiano segno + o segno —.

Ora possiamo estendere questo principio della « Distributività » anche a *polinomi*, cioè ad espressioni composte non di un sol numero ma di due o più termini. E cominceremo, euclidicamente, con la geometria.

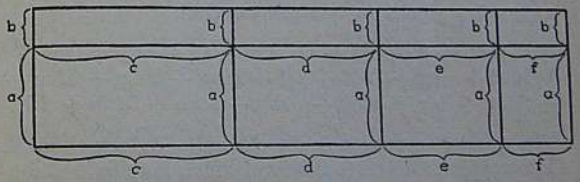


Fig. 7

Qui abbiamo otto rettangoli, che espressi con la loro area darebbero *ac*, *ad*, *ac*, *ae*, *af* e, sopra, bc, bd, be, bf. L'area totale è quindi

$$(a + b) \cdot (c + d + e + f)$$

o scambiando i termini (commutando)

$$(c + d + e + f) \cdot (a + b) = ac + ad + ae + af + be + bd + be + bf.$$

Con ciò abbiamo stabilito la regola fondamentale della moltiplicazione algebrica, che si esprime, nel caso in esame, dicendo: se un'espressione a più termini va molti-

plicata per un'altra, pure a più termini, si moltiplichi, tenendo conto della regola dei segni [1] ciascun termine del secondo polinomio prima per il primo termine del primo polinomio, poi per i successivi termini del primo polinomio, sommando infine tutti i prodotti parziali. Invertendo l'ordine della moltiplicazione il prodotto non cambia.

A parole sembra di descrivere un'operazione complicata, ma essa non è altro che la generalizzazione della regola imparata nelle elementari. Anzi è qualcosa di più semplice; poichè la regola appresa a scuola obbligava oltre che a tener conto della distributività e della commutatività dei fattori, di badare anche alla loro posizione decimale. Questo lo vedremo più avanti.

Eseguiamo prima una semplice moltiplicazione di polinomi algebrici (a quattro termini):

$$(7a + 5b + 8c + 9d + e) \cdot (2f + 4g + 6h) = 14af + \\ + 10bf + 16cf + 18df + 2ef + 28ag + 20bg + 32cg + \\ + 36dg + 4eg + 42ah + 30bh + 48ch + 54dh + 6eh.$$

In questa espressione non c'è nulla da semplificare. Si potrebbero fare certe trasformazioni, ma non le discuteremo ora.

Come si vede, noi abbiamo moltiplicato i numeri concreti, i coefficienti numerici, semplicemente fra di loro. Non si trattava in sostanza che di moltiplicare numeri ordinari: solo abbiamo potuto fondere in un solo numero i prodotti dei numeri concreti espressi dalle cifre in grazia del loro proprio algoritmo. Ma può anche accadere che in seguito ad un altro algoritmo si possano fondere anche i numeri espressi da lettere generiche.

Si abbia per es. da eseguire il prodotto: $(2a + 3b) \cdot (5a + 7ab)$: scriveremo:

---

(1) che ricordiamo essere: segni uguali danno un + al prodotto, segni disuguali un —.

$$(2a + 3b) \cdot (5a + 7ab) = 5a \cdot 2a + 5a \cdot 3b + 7ab \cdot 2a + + 7ab \cdot 3b = 10a \cdot a + 15ab + 14aab + 21abb = = 10a^2 + 15a \cdot b + 14a^2b + 21ab^2.$$

Questo ultimo esempio ci offre l'occasione di far la conoscenza di un nuovo concetto: quello della « estrazione » dei fattori o « messa a fattor comune ». Questo è una conseguenza della legge di distributività, o meglio, del suo inverso.

Noi possiamo con esso trasformare un'espressione, non fra parentesi, in gruppi fra parentesi o in un fattore che moltiplica un gruppo fra parentesi.

Riprendiamo la nostra espressione

$$10a^2 + 15ab + 14a^2b + 21ab^2.$$

Se ci chiediamo qual'è il fattore comune, vediamo subito che è l'a, contenuto in tutti i termini. Mettiamolo a fattor comune: quali saranno gli altri fattori? Naturalmente

$$10a + 15b + 14a.b + 21b.b$$

perchè l'espressione data si può scrivere

$$10aa + 15\,ab + 14aab + 21abb \text{ ossia}$$
$$a\ (10a + 15b + 14ab + 21bb).$$

Ma possiamo estrarre i fattori anche in altri modi, per es.:

$$2\,(5a^2 + 7a^2b) + 3\,(5ab + 7ab^2) \quad \text{oppure}$$
$$10a^2 + b\,(15a + 14a^2 + 21ab) \quad \text{oppure}$$
$$10a^2 + 15ab + 7ab\,(2a + 3b) \quad \text{oppure}$$
$$10a^2 + ab\,[15 + 7\,(2a + 3b)] \quad \text{oppure}$$
$$a\{10a + b\,[15 + 7\,(2a + 3b)]\} \quad \text{e così via.}$$

L'aggruppamento dei fattori in espressioni complicate costituisce un'arte che va esercitata. E questa operazione è sovente d'importanza enorme, poichè mediante trasformazioni, specie di frazioni, i cui numeratori e

denominatori sono espressioni algebriche, si possono semplificare notevolmente le formule.

Ma non anticipiamo. Vediamo ancora la « distributività » nel caso in cui ci sieno numeri negativi.

Scriviamo provvisoriamente come « somma algebrica » il problema: $[(+a)+(-2b)][(+c)+(-3d)]$, otterremo come risultato:

$$(+c)\,(+a)+(+c)\,(-2b)+(-3d)\,(+a)+(-3d)\,(-26)=$$
$$=ac \quad - \quad 2bc \quad - \quad 3ad \quad + \quad 6bd\,,$$

ciò che avremmo pure ottenuto se avessimo espresso il problema sotto la forma: $(a-2b)\,(c-3d)$.

Nuovamente abbiamo applicato qui la regola dei segni che la moltiplicazione di fattori di segno diverso dà — al prodotto, quella di fattori di segno uguale dà un invece $+$.

Ma mi chiederete: « dove sono nella seconda espressione del problema i segni? ». Risponderò che anche qui si ha fusione di segni (fusione di comandi). Il $(a-2b)$ vuol dire algebricamente $[+(+a)+(-2b)]$ oppure $[-(-a)-(+2b)]$ oppure anche $[+(+a)-(+2b)]$.

Nella moltiplicazione distributiva si aggiungono nuovi segni a questi segni, così che, eventualmente, il primo numero del prodotto può essere: $+(+a)\,.\,[+(+c)]$ oppure $(-a)\,.\,(-(+c)]$, il che dà sempre ac. Il secondo termine può essere formato nei seguenti modi: $+(-2b)\,.\,[+(+c)]$ oppure $-(+2b)\,.\,[+(+c)]$, oppure $+(-2b)\,.\,[-(-c)]$ il che dà sempre $-2bc$.

Estendiamo la nostra regola dei segni alla moltiplicazione: nella moltiplicazione di più di due fattori, il prodotto sarà positivo se tutti i segni sono più; se ci sono parecchi segni negativi, il prodotto sarà positivo se il numero di segni — è pari, negativo se è impari (perchè i meno danno un più solo per paia). Per es.:

$(+a).(+b).(+c)=+abc$	numero impari di +
$(+a).(+b).(+c).(+d)=+abcd$	» pari di +
$(-a).(-b).(-c).(-d)=+abcd$	» pari di —
$(-a).(-b).(-c)=-abc$	» impari di —
$(+a).(+b).(-c).(-d)=+abcd$	» pari di —
$(+a).(+b).(-c).(-d).(-e)=-abcde$	» impari di —

Siamo ora in grado di superare qualunque moltiplicazione algebrica di numeri interi.

Calcoliamo per es. un caso più complicato:

$$(5ab + 3ad + 9bc)\,(abc - 6de) = 5a^2b^2c + \\ + 3a^2bcd + 9ab^2c^2 - 30abde - 18ad^2e - 54bcde$$

Altro esempio:

$$(a - b)\,(2a - 3b) = 2a^2 - 2ab + 3ab - 3b^2.$$

Qui salta fuori qualcosa di nuovo che non abbiamo ancora incontrato fin qui: si presenta due volte l'ab, una volta come $-2ab$ e l'altra come $+3ab$. Possiamo qui fonderli in

$$+ (3 - 2)\,ab = ab.$$

Ora con queste somme algebriche si deve fare grande attenzione ai segni. Esistono varii giochetti algebrici in cui si fa cadere in inganno l'amico ignaro delle regole dei segni. Quindi: scrivere sempre chiaro e stare attenti.

E ora esaminiamo un altro algoritmo già a noi noto, quello della elevazione a potenza. Che cosa questa operazione sia lo sappiamo già; aggiungiamo ancora che è una operazione di calcolo costruttiva, sintetica o « tetica » come si dice anche. Si tratta di eseguire il comando di scrivere un numero (una *base*) tante volte come fattore quante ne indica un piccolo numero (l'esponente) segnato in alto, a destra della base

$$a^2 = a.a \quad a^3 = a.a.a$$
$$a^7 = a.a.a.a.a.a.a \quad \text{e così via}$$

E come moltiplicherò fra loro due potenze? per es. $a^2 \times a^7$? Scriviamo ancora

$$(a.a) \ . \ (a.a.a.a.a.a.a) = a^9$$

Ora si vede subito che 9 è la somma di 2 e di 7. Basta sommare gli esponenti.

Così $b^{10}.b^{11}.b^7 = b^{28}$ e così via.

La somma può essere algebrica, cioè contenere esponenti positivi ed esponenti negativi.

$$\text{Così} \quad a^3.\frac{1}{a^2} = a^3.a^{-2} = a$$

In generale scriveremo dunque questa regola:

$$a^m.a^{-n}.a^p \ . = a^{m-n+p}$$

Proponiamoci un altro quesito. Che cosa succede quando si volesse elevare a potenza una potenza? Per es. quando si volesse formare la quinta potenza di a al cubo: un po' di riflessione ce lo dice subito. Scriviamo

$$(a^3)^5 = a^3.a^3.a^3.a^3.a^3 = a^{3+3+3+3+3} = a^{5 \cdot 3}$$

La regola è dunque semplicissima: si moltiplicano tra loro gli esponenti. In generale scriveremo:

$(a^n)^m = a^{m \cdot n}$ oppure $[(b^a)^m]^p = b^{a \cdot m \cdot p}$ e così via.

Per completare la ricerca, ricordiamo ancora che ogni numero a potenza zero si rappresenta con l'unità: così $a^\circ = 1$; $a^\circ.a^n = a^{\circ+n} = a^n$ perchè $1 \times a^n = a.^n$; $a^n.a$ sarà naturalmente $a^n.a^1 = a^{n+1}$. Se ci chiedessimo qual'è il valore di $[(a^\circ)^3]^5$ scriveremmo $a^{\circ \cdot 3 \cdot 5}$ ossia $a^\circ = 1$. Questo del resto era evidente: a° è uguale ad 1 e l'unità elevata a qualsivoglia potenza è sempre uguale a 1.

Il lettore accorto avrà già afferrata qui una singolare connessione fra le tre operazioni « tetiche » fin qui conosciute e studiate. Elevare a potenza un numero vuol

dire moltiplicarlo per sè stesso; la moltiplicazione di più potenze porta a sommare, la elevazione a potenza di più potenze della stessa base a moltiplicare gli esponenti fra di loro.

Faremo solo notare qui che tutto questo algoritmo non è altro se non una somma ripetuta più volte che accumula gli uni sugli altri i numeri, indicando al contempo quante volte si deve sommare. Poichè $3^2 = 3 \cdot 3$ non è altro che il 3 scritto tre volte come sommando, cioè $3 + 3 + 3$ e $3^2 . 3^3 = 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ non è ancora altro che il 3 preso 81 volte come sommando, cioè $243 = 3^5$.

Chi conosca il meccanismo delle calcolatrici, lo comprenderà subito, poichè ogni cosidetta macchina per le moltiplicazioni non fa altro che sommare lo stesso numero tante volte fino a che abbia eseguito il comando di moltiplicazione: cioè tante volte quante sono le unità del moltiplicatore (o dell'esponente della potenza, quando si tratta sempre dello stesso moltiplicando).

Per non perderci, interrompiamo un momento le nostre considerazioni e assodiamo questo fatto, che cioè, finora, ogni operazione « tetica » ha avuto origine da quella che la precedeva. Così se prendiamo per ordine: la somma, la moltiplicazione, l'elevazione a potenza, vediamo che ogni moltiplicazione è l'esecuzione di una somma di moltiplicandi tutti eguali, ordinataci dal moltiplicatore: il quale ci indica anche quante somme dobbiamo fare. Così ogni elevazione a potenza è una moltiplicazione di tanti fattori eguali (alla base) quanti l'esponente ci comanda di prendere.

Noi potremo inferirne ora che la divisione deve avere una stretta parentela con la sottrazione: Che siamo giustificati a credere questo, ce lo mostra un semplice esempio. Sottraiamo da 120 il 13 più e più volte di seguito; avremo:

$120 - 13 = 107$ (1ª sottraz.), $55 - 13 = 42$ (6ª sottraz.),
$107 - 13 = 94$ (2ª »), $42 - 13 = 29$ (7ª »),
$94 - 13 = 81$ (3ª »), $29 - 13 = 16$ (8ª »),
$81 - 13 = 68$ (4ª »), $16 - 13 = 3$ (9ª »).
$68 - 13 = 55$ (5ª »),

ma qui dobbiamo fermarci se non vogliamo cadere nei numeri negativi. Abbiamo sottratto nove volte il 13 da 120 e ci è rimasto un 3. Abbiamo così eseguito una divisione *per successive sottrazioni:* precisamente come fa una macchina calcolatrice. Il quesito fondamentale della divisione che generalmente si enuncia: « quante volte il divisore sta nel dividendo e con quale resto »? si trasforma in questo: « quante volte si può sottrarre una grandezza da un'altra e che cosa rimane alla fine se non si vuol cadere nei numeri negativi? ».

Qui vediamo dall'esempio fatto, la enorme semplificazione che l'algoritmo della divisione, quale s'insegna nelle scuole, porta sul metodo delle sottrazioni successive. Qui nove sottrazioni consecutive con altrettante probabilità di commettere un errore, là una sola operazione che ci dà subito il risultato. La macchinetta calcolatrice può permettersi il lusso di tante successive sottrazioni, perchè anzitutto non sbaglia, essendo i suoi ingranaggi ad azione positiva, eppoi perchè si può far girare la manovella quanto si vuole; se non basta la mano soccorrerà un motorino – come nelle calcolatrici Burroughs –.

Per venire ad una conclusione provvisoria delle nostre ricerche algebriche, noi ci troviamo davanti al problema del come si fa la divisione dei numeri generici espressi con lettere. Incominciamo dal caso più semplice: che cosa dà a diviso b? Risposta: null'altro che $\frac{a}{b}$. Magra conclusione! La divisione non gode di proprietà commutative poichè essa si sviluppa, come la sottrazione, in un solo senso. Non abbiamo fatto insomma che scrivere

la nostra divisione in altro modo, che esprimere diversamente il « comando » di dividere.

Come per la moltiplicazione, esamineremo tre possibilità della divisione di numeri generici: cioè il comportamento delle singole grandezze generiche con o senza coefficiente numerico, il comportamento di potenze e quello di espressioni a più termini (polinomi). Riguardo alle grandezze singole si è già visto come non si possa procedere oltre all' (a : b). Ci si trova dinnanzi ad un « comando » che non si può eseguire se non dopo aver sostituito numeri concreti al posto di a e di b: per es. $a = 12$ e $b = 3$. E allora $a : b = 12 : 3 = 4$. Ma ci sono anche altre costellazioni: che cosa significa per es. $3a : a$? In cose più concrete: come si comporta un gruppo di 3 albicocche rispetto ad una singola albicocca? Questo vuol dire in parole più povere ancora: quante volte una albicocca è contenuta in un gruppo di 3? Non c'è nemmeno bisogno di essere il sullodato ragazzino sveglio per trovare la risposta.

In generale $na : a = n$. Parimenti $15a : 3a = 5$, e poichè ogni numero diviso per se stesso dà 1, sarà $\frac{a}{a} = 1$. Di qui possiamo anche vedere che 25 abcd : 5ac è uguale a 5 bd. Basterà, per procedere franchi, di aver sempre dinanzi alla mente la « prova » che nell'ultimo caso scritto è $5bd \times 5ac = 25.abcd$. Questo non presenta nessuna difficoltà.

E ora esaminiamo il comportamento delle potenze nell'operazione di divisione: scriviamole come gruppi di fattori:

$$\frac{a^6}{a^3} = (a.a.a.a.a.a) : (a.a.a) = ?$$

Non avremo che da dividere la prima espressione tra parentesi per a poi di nuovo per a poi ancora per a; per le cose dette sopra, risulta : $a \cdot a \cdot a \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = a \cdot a \cdot a =$

$= a^3$, ossia $a^6 : a^3 = a^3$. Inoltre $(b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b) : (b : b)$ darebbe lo stesso risultato che $b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot 1 \cdot 1$ ossia $b.b.b.b.b = b^5$ ed abbiamo trovato $b^7 : b^2 = b^5$.

La regola ora è evidente: abbiamo di nuovo dinanzi a noi come un'immagine speculare, e scorgiamo chiaramente il legame delle due operazioni risolutive (litiche) (1) della divisione e della sottrazione. Poichè

$$a^6 : a^3 = a^{6-3} = a^3 \qquad \text{e}$$
$$b^7 : b^2 = b^{7-2} = b^5$$

Da esperti algebristi, fabbrichiamo subito la formola generale: $a^m : a^n = a^{m-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n}$. La quale ci dà anche $a^m : a^m = a^\circ = 1$ e $a^m : a^\circ = a^{m-o} = a^m \times 1 = a^m$.

Le controprove ci daranno la conferma: Così per es.: $a^m : a^1 = a^{m-1}$; controprova $a \times a^{m-1} = a^1 . a^{m-1} = a^{1+m-1}$ a^m e così via.

Per finire, ancora un caso complicato, per mostrare il giuoco simultaneo di diversi algoritmi:

$$39a^7b^5.c^p \,.d^{m+2} : 13a^4c^sd^3 = 3a^{7-4}.b^5.c^{p-s}.d^{m+2-3} =$$
$$= 3a^3b^5c^{p-s}.d^{m-1}.$$

Qui osserviamo che possiamo sempre rappresentarci il non figurare di una potenza al divisore (2) come se la base corrispondente vi apparisse coll'esponente zero, cioè come semplice unità. Nel nostro esempio avremmo potuto fare comparire il b nel divisore scrivendo

$$13a^4b^\circ c^s\, d^3$$

il che ci avrebbe dato nel risultato $b^{5-0} = b^5$, cioè non l'avrebbe modificato.

Insomma – l'abbiamo già visto per i sistemi numerici – l'introduzione della potenza zero porta sovente ad un completamento elegante della simmetria delle formole.

---

(1) litiche del greco «lisis» che vuol dire scioglimento, soluzione.

(2) Più avanti vedremo anche il caso del «non figurare» di una potenza nel dividendo.

Dopo una piccola premessa, ci misureremo con uno dei problemi algebrici più difficili – almeno al punto in cui siamo del nostro studio: la divisione di polinomi.

In siffatte espressioni vigono certi principii ordinativi che in alcuni casi sono indispensabili, quantunque l'ordinamento dei termini nulla cambi al valore della espressione. Questo principio l'abbiamo già incontrato una volta: era l'ordinamento per ordine di grandezza nel sistema decimale: che non è altro se non l'ordinamento per potenze « crescenti » o « decrescenti » della base del sistema: « crescente » se si legge in un verso, decrescente se lo si legga nell'altro.

Invero nel nostro sistema decimale usiamo ordinare secondo le potenze decrescenti della base 10 e leggiamo da sinistra a destra. Difatti 91.435 si legge

$$9.10^4 + 1.10^3 + 4.10^2 + 3 \times 10^1 + 5.10^0.$$

Trasferiamo alla scrittura algebrica questo stesso principio e quando avremo un polinomio qualunque: $a^3 + a^7 + + a^4 - a^2 + a^{16} - a^5$ ordiniamolo subito secondo le potenze decrescenti:

$$a^{16} + a^7 - a^5 + a^4 + a^3 - a^2.$$

Se avessimo esponenti letterali li potremmo ordinare analogamente per ordine alfabetico decrescente: dall'm all'a.

E poichè siamo ormai avvezzi a rappresentarci tutte le grandezze algebriche nel modo più generale, noi potremmo inciampare nello sviluppo del nostro pensiero in certe difficoltà che sarà bene prevedere.

Possono per es. presentarsi diverse potenze raggruppate in fattori come: $19a^2bc^7d^4$, oppure $5a^7b^3c^5d^9$ e così via: e può anche darsi che mentre staremo ordinando per es. secondo le potenze dell'a, le potenze del b interferiscano fra di loro; o se ordiniamo secondo le potenze del b, interferiscano quelle dell'a, o quando ordiniamo

secondo le potenze del c interferiscano quelle dell'a e del b. Non c'è altra via di scampo che di deciderci secondo quale principio si vuole ordinare. Se nella nostra biblioteca ordiniamo i libri secondo la loro grandezza, non possiamo contemporaneamente ordinarli secondo le materie: A meno che la grandezza vada d'accordo con la materia, come negli atlanti o negli album di disegni.

E ora esaminiamo attentamente la divisione di espressioni a 4 termini (quadrinomie) e scriviamo la truce espressione algebrica seguente:

$$(10a^4b + 35a^5h + 45a^6b^2h - 4abc^2h - 14a^2c^2h^2 - 18a^3b^2c^2h^2) \text{ divisa per } (-2c^2h + 5a^3).$$

Procediamo per ordine e vedremo che la difficoltà non è poi quella che sembra:

Prima operazione: ordinare entrambe le espressioni secondo le potenze decrescenti del primo numero generico $-a-$: scriveremo dunque

$$(45a^6b^2h + 35a^5h + 10a^4b - 18a^3b^2c^2h^2 - 14a^2c^2h^2 - 4abc^2h) : (5a^3 - 2c^2h) = ?$$

Il passo seguente rassomiglia a quello della divisione con numeri decimali: cerchiamo cioè quante volte il primo termine del divisore ($5a^3$) sta nel primo termine del dividendo ($45a^6b^2h$). Poi facciamo la contromoltiplicazione e moltiplichiamo il primo quoziente per il divisore e deduciamolo dal dividendo, cioè dai termini corrispondenti a quello del polinomio divisore. Se nel dividendo non ci sono altri termini da cui sottrarre, si portano in basso e si aggiungono o sottraggono al resto eventuale.

Poi si cerca quante volte il primo termine del divisore sta in quel termine del dividendo che è stato abbassato e che si trova alla più alta potenza di a; il risultato si scrive nel quoziente, si fa una nuova contromoltiplicazione e così via. Si scrive cioè:

$$
\begin{array}{l|l}
(45a^6b^2h + 35a^5h + 10a^4b - 18a^3b^2c^2h^2 - 14a^2c^2h^2 - 4abc^2h) : (5a^3 - 2c^2h) = \\
\mp 45a^6b^2h \qquad\qquad \mp 18a^5b^2c^2h^2 & = 9a^3b^2h + \\
\hline
0 \quad + 35a^5h \qquad\qquad 0 & + 7a^2h + 2ab \\
\mp 35a^5h \qquad\qquad \mp 14a^2c^2h^2 & \\
\hline
0 \quad + 10a^4b \qquad\qquad 0 & \\
\mp 10a^4b \qquad\qquad \mp 4abc^2h & \\
\hline
0 \qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

La divisione è perfetta (senza resto) e dà come quoziente il polinomio alla destra, il quale è pure ordinato secondo le potenze decrescenti di a.

Allo schema qui sopra si può osservare che abbiamo eseguito la sottrazione simbolicamente solo col cambiare il segno al sottrattore. Con ciò sommiamo algebricamente: facendo uso per questo del segno inferiore. Per essere più espliciti: con la prima contromoltiplicazione avevamo avuto

$$45a^6b^2h - 18a^3b^2c^2h^2$$

termini questi che troviamo nel dividendo e che, sottratti da esso, danno come resto zero. Per continuare la divisione, cerchiamo poi il termine sul quale non si è ancora operato, in cui a è alla più alta potenza,e troviamo $35a^5h$: lo mettiamo in evidenza sotto alla prima orizzontale, come se si trattasse di un resto e procediamo come detto sopra.

Non è il mio compito di formare degli assi del calcolo algebrico. In ogni manuale di scuola secondaria si troveranno quanti esempi ed esercizi si vogliono. Persino l'Algebra di Eulero è un ottimo libro per siffatti esercizi.

Io tendo ad un altro fine e voglio semplicemente esporre la struttura, la forma degli algoritmi matematici, per preparare i lettori ad intendere il calcolo integrale. Mi accontenterò, come chiusa di questa parte dell'Algebra delle grandezze generali e definite, di aggiungere ancora un problema innocuo di divisione algebrica:

$$
\begin{array}{l}
(a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = a - b \\
\underline{-a^2 \mp ab} \\
0 - ab + b^2 \\
\quad \underline{\mp ab \pm b^2} \\
\quad\quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

assieme a quest'altro analogo:

$$
\begin{array}{l}
(a^3 + b^3) : (a + b) = a^2 - ab + b^2 \\
\underline{-a^3 \pm b^3a^2} \\
0 - ba + b^3 \\
\quad \underline{\mp ba^2 \pm b^3} \\
\quad\quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

Con ciò siamo arrivati ad una nuova tappa. Da questo punto dominiamo le quattro operazioni fondamentali: addizione, sottrazione, divisione e moltiplicazione come pure l'elevazione a potenza dei numeri interi nel sistema decimale e con grandezze generiche algebriche. E siamo con ciò equipaggiati per risolvere i problemi e gli indovinelli algebrici e per passare alla ricerca delle incognite x, allo studio delle « equazioni ». Queste serviranno da passerella per salire nelle regioni più elevate, anzi, in quelle altissime dell'arte nostra.

Capitolo XI

LE FRAZIONI ORDINARIE

Superiamo ancora un piccolo spuntone di roccia, per passare poi sul colle degli enigmi matematici. Si tratta qui più di un modo particolare di scrivere la divisione che non di un'innovazione di sostanza nel nostro algoritmo.

Storicamente, il doppio punto come segno di divisione è stato adottato assai tardi. Questo simbolo fu creato

dal grande Leibnitz e venne di poi adoperato col segno di divisione – linea orizzontale o inclinata – già da lungo tempo usato nei computi. Una frazione non è altro che una divisione presentata, preparata, ma non eseguita, sia essa eseguibile o no.

In via eccezionale, incominceremo qui con i numeri generali dell'Algebra e scriveremo come tipo della frazione: $\frac{a}{b}$ che esprime tanto la divisione – da eseguirsi – di a per b, o solamente il rapporto di a a b. Tutti sanno che il numero sopra la lineetta si dice *numeratore* e quello sotto *denominatore*. Se il numeratore è l'unità si tratta di frazioni originali o di numeri reciproci $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ ecc.

Qui il denominatore è maggiore del numeratore e si ha la *frazione propria* la quale è condizionata al fatto che $a < b$ (a minore di b). Ecco intanto un nuovo segno che salta fuori ($> <$), il quale, con la sua punta, indica sempre il numero minore. Quando si vuol dire poi che un numero è *molto* minore di un altro si duplica il segno: $a >> b$ vuol dire *a molto* maggiore di *b*. Sarà poi $\frac{a}{b}$ una frazione non propria se $a > b$ perchè può darsi che, eseguendola, si abbia per quoziente un numero intero oppure un intero seguito da frazione (numero frazionario) come:

$$\frac{6}{2} = 3; \quad \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \text{ od } 1\frac{1}{2} \text{ ecc.}$$

Nei procedimenti di calcolo degli antichi Egizi e in quelli dei Greci, le frazioni originali hanno avuto una parte assai importante. Per es. gli Egizi scrivevano per $\frac{7}{29}$ la somma $\frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{87} + \frac{1}{232}$ e in Grecia siffatte serie erano all'ordine del giorno presso i ma-

tematici. Anzi i Pitagorici ci speculavano sopra più del necessario.

Noi siamo ora abituati a trascurare le frazioni originali, poichè possiamo calcolarle e presentarle sotto forme più comode. Solo nel calcolo integrale ha importanza il procedimento della cosiddetta suddivisione in frazioni parziali che ha qualche somiglianza col metodo egiziano anzidetto.

Il concetto di frazione c'insegna ancora dell'altro: ci conferisce per la prima volta l'idea di un numero intero scomposto, frazionato. $\frac{1}{3}$ è il terzo di uno; $\frac{5}{7}$ la settima parte di 5 e così via. Si può quindi in una divisione chiedere non solo quanti interi sono contenuti in un numero, ma anche quante frazioni di intero sono contenute fra due quozienti interi successivi, quando esiste un resto. Potremo in altri termini sempre tener conto del resto nel quoziente, perchè il numero delle frazioni di intero è infinito.

Se in una frazione numeratore e denominatore sono eguali, abbiamo già visto che il quoziente è 1: se il numeratore è zero la frazione è uguale a zero.

Se invece è zero il denominatore: ah, allora ci troviamo nell'imbarazzo! Che cosa rappresenta $\frac{a}{0}$? Facciamo la controprova: e cerchiamo quella grandezza che moltiplicata per zero dia a. Problema non meno insolubile, perchè qualunque numero anche il più grande dà sempre zero se è moltiplicato per zero.

Ma calcoliamo un po' diversamente (vorrei dire « dinamicamente » e non « staticamente »). Procediamo così: se dividiamo 5 per 100 avremo cinque centesimi; se dividiamo 5 per 50 avremo 10 centesimi, cioè di più; se dividiamo 5 per 25 avremo 20 centesimi e se infine dividiamo 5 per 5 avremo l'unità. Andiamo avanti: dividiamo 5 per 3 avremo $\frac{5}{3}$ ossia $1\frac{2}{3}$, dividiamo per 2 avremo $\frac{5}{2}$ ossia

$2\frac{1}{2}$; dividiamo infine per 1 e avremo 5. Se andiamo ancora avanti e dividiamo il nostro cinque per numeri compresi fra 1 e 0 cioè per frazioni originali, per es. $\frac{5}{1/20}$ o $\frac{5}{1/365}$ e otteniamo evidentemente dei valori crescenti rapidamente. Per es. dividendo 5 per $\frac{1}{1.000.000}$ abbiamo 5 milioni. Ma lo zero è ancor sempre più piccolo di questa frazione anzi della più piccola frazione che si possa pensare e se scriviamo $\frac{5}{1/\text{numero enorme}}$ abbiamo $5 \times$ numero enorme. Quindi: $\frac{5}{0}$ sarà cinque volte il numero più grande pensabile. Lo chiameremo numero infinito e scriveremo ∞. Allora?

Allora scriviamo coraggiosamente:

$$\frac{5}{0} = \infty.$$

Quello che abbiamo fatto qui appartiene già all'Analisi infinitesimale e si chiama processo « al limite », determinazione del *limite*. Io non posso affermare senz'altro che $\frac{5}{0}$ è uguale all'infinito: dirò più precisamente che « al limite » tende verso l'infinito. Non possiamo concepire l'infinito, ma afferriamo chiaramente come ad esso si possa tendere.

Come in un'ascensione, noi andiamo gettando di quando in quando uno sguardo alla meta, per abituarci a non avere il capogiro. Eppoi in matematica, io credo che proprio quella « matematica inferiore » ci appare talvolta difficile, scaglionata di « salti », insoddisfacente soprattutto perchè nei passi scabri o ci si contenta di affermare dogmaticamente oppure si passa oltre scivolando con gesto elegante che tradisce la nostra poca sicurezza.

Noi non scivoleremo elegantemente e diremo chiara-

mente: l'affermazione $a : 0 = \infty$ è un impossibilità, perchè anche $\infty \times 0$ è ancora zero quando si considerino le cose staticamente. Quando invece noi vogliamo considerare lo zero come il più piccolo di tutti i numeri al quale possiamo giungere, cioè come « limite zero » e ∞ come « limite infinito » allora possiamo affermare, senza far esplodere il nostro Algoritmo della divisione, che:

$$\frac{a}{\lim 0} = \text{lim. } \infty \text{ o praticamente } \frac{a}{o} = \infty .$$

Eravamo incappati già una volta in un simile mistero quando avevamo scritto $\frac{0}{0}$ come rapporto fra due lati di un rettangolo, affermando che esso aveva un valore finito.

Ma notiamo ancora un altro singolare risultato delle nostre considerazioni sui limiti: noi avevamo diviso il 5 per « lim. 0 ». Possiamo prendere qualunque altro numero: avremo sempre « lim. ∞ » come risultato. Facciamo la controprova. Se $\frac{5}{\lim 0} = \text{lim. } \infty$ sarà « lim. 0 » $\times$ $\times$ « lim. ∞ » $= 5$ e lo stesso vale per qualunque altro numero per es. $\frac{530}{\lim 0} = \text{lim. } \infty$: quindi « lim. 0 » $\times$ $\times$ « lim. ∞ » $= 530$.

Che cosa vuol dire tutto ciò? Che il prodotto dei due limiti è un numero reale ma *indeterminato*.

E intanto siamo usciti parecchio di carreggiata e dovremmo tornare alle nostre frazioni. Ma facciamo ancora una « puntarella » fuori strada, per vedere che cosa vuol dire in sostanza « rapporto » di cui abbiamo parlato di passata a proposito di $\frac{a}{b}$. Possiamo considerare la cosa sotto il suo aspetto geometrico, cioè di misura. La misura delle dimensioni di un tavolo rettangolare mi hanno dato 6 m. di lunghezza per 2 m. di larghezza. Qualunque ragazzo dirà subito che la lunghezza del ta-

volo sta alla sua larghezza nel rapporto di 6 a 2, vale a dire che il tavolo sarà tre volte lungo quant'è largo.

Il rapporto 6 a 2 è uguale a quello 3 ad 1: in questo caso, invece del metro io mi servo di una delle grandezze per misurare l'altra (mettendola « in rapporto » con l'altra). Dicendo che la lunghezza della mia tavola è tre volte la sua larghezza, io ho espresso il risultato di una misura, coll'indicare quante volte la larghezza è contenuta nella lunghezza da misurarsi, e cioè ho diviso questa per l'unità di misura. Se invece della larghezza del tavolo, prendessi come unità di misura la lunghezza, scriverei che la larghezza del tavolo (grandezza da misurarsi) è $\frac{1}{3}$ della lunghezza (unità di misura).

Meglio è servirsi di una unità di misura indipendente, come per es. il metro ed esprimersi dicendo che la lunghezza sta alla larghezza nel rapporto di sei metri a due, o semplicemente nel rapporto $\frac{6}{2}$ o $6 : 2$. In lettere diremmo nel rapporto di a a b o $\frac{a}{b}$. Possiamo anzi scrivere nel caso nostro $\frac{a}{b} = \frac{6}{2}$ o $a : b = 6 : 2$ e così per altre misure consimili

$$m : n = 27 : 9 = 15 : 5 \text{ oppure } \frac{27}{9} = \frac{15}{5}.$$

In queste equazioni abbiamo espresso una *proporzione* cioè una eguaglianza di rapporti. La proporzione è dunque una equazione, cioè un'espressione che stabilisce una eguaglianza. Ne esamineremo tosto le caratteristiche.

Proponiamoci di esaminare le nostre frazioni ed il loro algoritmo, cioè le regole da seguire nel calcolo delle frazioni.

Anzitutto nella somma e nella sottrazione: abbiamo già detto che le frazioni rappresentano nuovi numeri

intermedi fra i numeri interi. Le frazioni proprie hanno valori compresi tra lo 0 e l'1: quelle improprie possono avere un valore qualunque. Naturalmente anche le frazioni, come tutti i numeri, possono essere affette da un segno + o —. Quando consideriamo le frazioni comuni come nuovi numeri, potremmo altrettanto bene ritenerle tanti oggetti; la frazione $\frac{1}{3}$ potrebbe essere per es. una mela, la frazione $\frac{1}{4}$ una pera, $\frac{3}{7}$ può essere un limone. Quello che caratterizza una frazione, che la « denomina », è appunto quella parte che abbiamo chiamata il denominatore: essa ci dice per es. che $\frac{3}{4}$ è tre volte $\frac{1}{4}$ (per esempio tre pere, secondo la nostra fantastica nomenclatura).

Questa digressione ci introduce nella natura delle operazioni di somma che potremmo fare con le frazioni. Non possiamo, come già abbiamo visto, sommare pere con mele e con limoni, ma possiamo farlo se li consideriamo sotto la denominazione comune di « frutti ». Così non possiamo sommare senz'altro frazioni di denominatori diversi: dobbiamo trovare un denominatore comune (come « frutto » per le pere, le mele ed il limone). Ogni ragazzo sa che cosa vuol dire ridurre una frazione al denominatore comune e non voglio considerare il mio lettore da meno di un ragazzino sveglio. Basterà mostrare qui un esempio, per essere subito compreso. Facciamo anzi il caso del « minimo comune multiplo »:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{5}{8}-\frac{4}{13}=?$$

Il denominatore comune è in questo caso il prodotto di tutti i denominatori $3.5.8.13 = 1560$.

Per portare ogni singola frazione a questo denominatore comune devo modificarne i numeratori, in modo

da non variare il valore della frazione; quindi moltiplicherò ogni singolo numeratore per i denominatori di tutte le altre frazioni. Avrò per es. per la prima frazione:

$$\frac{1}{3} \times \frac{5 \cdot 8 \cdot 13}{5 \cdot 8 \cdot 13} = \frac{520}{1560} = \frac{1}{3}$$

perchè ho moltiplicato sopra e sotto per lo stesso numero. Allora procedendo nel nostro calcolo avremo:

$$\frac{1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 13}{3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 13} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 13}{5 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 13} + \frac{5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13}{8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13} - \frac{4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8}{13 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8} =$$

$$= \frac{520 + 624 + 975 - 480}{1560} = \frac{1639}{1560}$$

In generale l'operazione di somma algebrica assume questa forma:

$$\frac{2a^2b}{5c} + \frac{3\,df^2}{7bh} - \frac{19abcd^2}{3h^2m} =$$

$$= \frac{2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot a^2b^2h^3m + 3 \cdot 5 \cdot 3cdf^2h^2m - 19 \cdot 5 \cdot 7ab^2c^2d^2h}{5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot bch^3m} =$$

eseguendo le operazioni ed ordinando secondo le potenze decrescenti dell'a

$$= \frac{42a^2b^2h^2m - 665ab^2c^2d^2 + 45cdf^2hm}{105bch^2m}$$

espressione più semplice di questa non si può scrivere.

Più sopra avevamo considerato ogni frazione come consistente in una frazione pura (con numeratore eguale all'unità) moltiplicata per un coefficiente: per es. $\frac{3}{4} = 3\left(\frac{1}{4}\right)$ oppure $6\,\frac{4}{29} = 6 \times 4\left(\frac{1}{29}\right)$.

In generale $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$ o $= ab \cdot \frac{1}{c}$.

Siccome in una frazione tanto vale moltiplicare il numeratore quanto dividere il denominatore per un numero, posso anche scrivere $3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4:3}$ o in generale

$$a\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{b}{c:a}.$$

Questa osservazione potrà servirci per abbreviare le operazioni. Per es. $9\frac{5}{27}$ si può scrivere anche $\frac{9\cdot 5}{9\cdot 3} = \frac{5}{3}$ oppure $\frac{5}{(9\cdot 3):9}$.

Per moltiplicare più frazioni fra di loro, basta, come è noto, moltiplicare tutti i numeratori fra di loro, poi tutti i denominatori, così:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\cdot\frac{q}{h} = \frac{aceq}{bdfh}$$

o in cifre

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{9}{12} = \frac{90}{1008} = \frac{45}{504} = \frac{5}{56}$$

Poichè ogni singolo numeratore figura come fattore nel numeratore del prodotto e ogni singolo denominatore figura come fattore nel denominatore, se io trovassi sopra e sotto dei fattori comuni posso senz'altro non scriverli e così abbrevio l'operazione.

L'elevazione a potenza di una frazione non è che una specie di moltiplicazione:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^5 \text{ vuol dire } \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a^5}{b^5}$$

La regola è dunque evidente: si eleva alla potenza indicata tanto il numeratore che il denominatore.

La divisione con le frazioni è altrettanto semplice. Poichè il numeratore è per così dire la quantità m di

n^{esimi} della frazione $\frac{m}{n} = m\,\frac{1}{n}$ ci basta dividere il numeratore per il numero proposto. Così $\frac{3}{4} : 3 = \frac{1}{4}$ come 3 mele divise per tre danno 1 mela. Un po' più complicato è il caso della divisione di una frazione per un'altra o di un intero per una frazione. $5 : \frac{3}{4}$ per es. non ci dice nulla sì, di primo acchito: possiamo al più dire che il quoziente sarà maggiore di 5 perchè $\frac{3}{4}$ è più piccolo dell'unità. Allora facciamo come gli antichi, Egizi e Greci: rifugiamoci nelle frazioni pure. Se io dovessi dividere 30 per 15 potrei tranquillamente scrivere $30 : (5 \cdot 3)$. Ora io sono libero di dividere prima 30 per 5 ciò che mi darebbe 6 poi dividere 6 per 3 ciò che darebbe 2. Così nel caso nostro possiamo scrivere $5 : \frac{3}{4} = 5 : \left(3 . \frac{1}{4}\right)$. Dividiamo qui prima per $\frac{1}{4}$. In 5 unità ci saranno venti quarti, poi divideremo per 3 questi venti quarti. $\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$.

Proviamo con un altro esempio: $7 : \left(5 . \frac{1}{9}\right)$. La frazione $\frac{1}{9}$ è contenuta 63 volte in 7; questi $\frac{63}{9}$ vanno ancora divisi per 5.

Ora se esaminiamo bene questo processo, scopriamo che stavamo seguendo una via difficile mentre se ne presentava una facilissima. Bastava moltiplicare il 7 per 9 e dividere il 63 per 5, cioè in generale moltiplicare una frazione per l'altra rovesciata.

$$\text{dividendo} : \frac{\text{numeratore}}{\text{denominatore}} = \text{dividendo} \times \frac{\text{denominatore}}{\text{numeratore}}$$

$$= \text{dividendo} \times \text{denominatore} \times \frac{1}{\text{numeratore}}$$

Questo c'introduce il concetto di « reciproco » di un numero il quale non è altro che l'unità divisa per questo

numero stesso o in generale il reciproco di una frazione $\frac{a}{b}$ è $\frac{b}{a}$ cioè la frazione stessa capovolta.

Allora come regola generale della divisione algebrica delle frazioni scriveremo:

$$n : \frac{a}{b} = n . \frac{b}{a} \qquad \frac{m}{n} : \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \cdot \frac{b}{a} = \frac{mb}{na}$$

Se applichiamo questo processo ai nostri esempi precedenti troviamo:

$$5 : \frac{3}{4} = 5 . \frac{4}{3} = \frac{20}{3} = 6\,\frac{2}{3}$$

$$7 : \frac{5}{9} = 7 . \frac{9}{5} = \frac{63}{5} = 12\,\frac{3}{5}.$$

La regola va bene.

La cosa è ancor più semplice quando si debba dividere un numero per una frazione: basta moltiplicare questo numero per il denominatore della frazione

$$25 : \frac{1}{2} = 2 \times 25 = 50.$$

Facciamo ancora qualche esempio:

$$\frac{5}{3} : \frac{6}{8} = \frac{5}{3} . \frac{8}{6} = \frac{40}{18} = \frac{20}{9} = 2\,\frac{2}{9}$$

$$\frac{17}{19} : \frac{9}{13} = \frac{17}{19} . \frac{13}{9} = \frac{221}{171} = 1\,\frac{50}{171}.$$

Queste nostre considerazioni ci portano al concetto di doppia frazione. La frazione

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ si può anche scrivere $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$.

Entrambe danno per risultato $\frac{a\,d}{b\,c}$. Se io avessi invece $a : \frac{c}{d}$ potrei scrivere $\frac{a}{\frac{c}{d}}$ o $\frac{\frac{a}{1}}{\frac{c}{d}}$ e otterrei $\frac{a\,d}{c}$.

Se finalmente dovessi dividere $\frac{a}{b}$ per c io dovrei scrivere $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a \times 1}{b \times c}$ ossia $\frac{a}{b \cdot c}$ come risultato.

L'ultimo esempio ci mostra come si può dividere una frazione per un numero intero: moltiplicandola per il reciproco $\frac{1}{c}$ del numero intero c. Si può anche dire dividendo per c il coefficiente a della frazione pura $\frac{1}{b}$.

Questo ci conduce ad altre regole generali: siccome possiamo ricondurre la divisione di due numeri interi ad una divisione di frazioni, come per es.:

$$a : b = \frac{a}{1} : \frac{b}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b} = a\,\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

possiamo sempre eseguire la divisione moltiplicando il dividendo per il reciproco del divisore. Questo algoritmo trova larghe applicazioni nel calcolo pratico (con tabelle dei numeri reciproci) e nella costruzione e maneggio delle macchine calcolatrici.

Capitolo XII

EQUAZIONI

Si è già accennato alla parte che ha la « incognita x » nelle equazioni. Si è anche affermato essere l'equazione un « algoritmo », una macchina meravigliosamente ideata per pensare e calcolare, allo scopo di risolvere ogni sorta di enigmi; finalmente, si è assodato che il segno di eguaglianza nelle equazioni non è solo una constatazione ma addirittura un comando. Il comando cioè di così scegliere il valore di x da stabilire un'eguaglianza, anzi una « identità » fra i due membri dell'equazione. Vale a dire al comando di cercarne la soluzione.

E senza più teorizzarci sopra, proponiamoci subito uno di questi enigmi: Quale è il valore della incognita x che soddisfa alle seguenti condizioni: io dovrei prima moltiplicarla per 7, poi aggiungervi 19, poi togliere 4 per ritrovare un numero dieci volte maggiore di quello cercato. Il problema s'« imposta » matematicamente scrivendo l'equazione:

$$7x + 19 - 4 = 10x.$$

Eseguiamo quello che essa ci indica: avremo anzitutto la semplificazione:

$$7x + 15 = 10x$$

poi proviamo a dare alla x incognita diversi valori successivi cominciando per es. dall'1. Si troverebbe, dopo qualche tentativo, che, per $x = 5$ l'equazione diventa una identità:

$$35 + 15 = 50.$$

Così il problema verrebbe risolto per tentativi, come lo farebbe un enigmista: ma questo metodo è tutt'altro

che soddisfacente. Nicolò Tartaglia (1), il matematico bresciano, lo adoperò per molti problemi: è il cosiddetto metodo di «falsa posizione» che esamineremo meglio più innanzi e che ci avvicina alla soluzione per successivi tentativi. Nel caso nostro l'abbiamo imbroccata, perchè x era un numero intero; ma se fosse stata una frazione? oppure un numero negativo? Eppoi, la $x = 5$ è la sola soluzione possibile?

Prima di ricercare l'algoritmo della equazione, fermiamoci un momento sul vocabolo stesso: Equ — Azione implica evidentemente una azione per equare due cose, due quantità; dobbiamo fare qualcosa di non molto diverso da una pesata sulla bilancia: stabilire una condizione di equilibrio. Questo ci comanda un'equazione.

Sarebbe pazzesco compiere questa azione così, a vanvera. Dobbiamo procedere con metodo per trovare la x cercata: se c'è la possibilità, dobbiamo calcolare e trovare l'incognita, necessariamente. Se per es. riuscissimo a portare da una parte del segno $=$ tutte le x incognite e dall'altra tutte le grandezze note, si arriverebbe ad una equazione del tipo $nx = a$ o $x = b$. Ma scrivere $x = b$ vorrebbe già dire aver risolto l'equazione.

Facciamo un esempio di $nx = a$; $3x = 9$. È evidente che anche quì la soluzione sarà $x = \frac{9}{3} = 3$ o in generale $x = \frac{a}{n}$.

Ma prima che io possa giungere a questa forma così semplice che mi assicura che non c'è altra soluzione, io devo in generale sottoporre le mie equazioni ad una quantità di trasformazioni, per il calcolo delle quali non

---

(1) Nicola *Fontana* detto il Tartaglia per la sua balbuzie causatagli da una mutilazione durante il sacco di Brescia nel 1512, fu autodidatta e abilissimo matematico. La sua vita travagliata è da lui raccontata in «quesiti et invenzioni diverse» (1546). A lui si deve la prima versione in italiano dei libri di Euclide (1543) e di alcune opere di Archimede. L'opera sua principale è il «Trattato generale di numeri e misure (Venezia 1556-60).
Nato a Brescia nel 1506, morì a Venezia nel 59.

basta fare i conti della serva. Mi occorre di conoscere un algoritmo, certe norme di calcolo sicure e generali, che mi servano di filo di Arianna per non perdermi nel labirinto delle trasformazioni e per arrivare sicuro alla meta.

Anche storicamente si dovette percorrere una ben lunga via prima di trovare questo algoritmo, questa chiave che apre tutte le porte. Solo nel XVI e XVII secolo si è potuto stabilire con sicurezza le regole della risoluzione algebrica delle equazioni. Ad esse molto contribuì il piemontese Lagrange, che fu considerato il più grande matematico della sua epoca; ma già prima, Gerolamo Cardano milanese e Nicolò Tartaglia bresciano e Leonardo da Vinci avevano proposto metodi particolari ingegnosissimi di soluzione di certe equazioni.

Prima di andare alla scoperta dell'algoritmo, assodiamo in modo chiaro ed esplicito questo: in ogni equazione ci sono due specie essenzialmente diverse di numeri o di grandezze: quella incognita, la x [1] e le cosiddette «*costanti*» che sono già conosciute fin dall'inizio dei nostri calcoli, o per lo meno si considerano tali.

Chiariamo questo fatto con qualche esempio prima di preoccuparci delle regole di calcolo, chè se non si arriva ad afferrare questo concetto si può rinunciare a penetrare nei meandri della matematica superiore. La x e le costanti son due «specie» distinte di numeri se così posso esprimermi [2], le costanti sono permanenti, inerti, conservative. La x è mobile, variabile e può avere diversi significati prima di assumere il valore definitivo ed esatto. Allora, e solo allora, anche la x può assorgere alla dignità di numero univoco (cioè non equivoco) e costante. Prima di ciò fa la parte, a dirla col poeta piemontese Fulberto Alarni, del «folo nei tarocchi» [3].

(1) Qui espressamente parleremo, per semplicità di *una* incognita, ma possono esservene molte altre.
(2) Il testo tedesco parla addirittura di «razze» (N. di Tr).
(3) Poesia sulla Calcina.

Questo in linea di principio: perchè in una determinata equazione la x ha un valore predeterminato se pur non ancora conosciuto. Ritorniamo all'equazione scritta qui sopra:

$$7x + 19 - 4 = 10x.$$

In essa 19 e 4 sono « costanti », 7x e 10x sono multipli dell'incognita (si potrebbe anche dire che l'incognita compare con due coefficienti diversi). Nell'equazione:

$$7x + 13x + 9x - 2x + 25 = 106$$

io posso senz'altro fare la somma algebrica dei coefficienti dell'incognita che raccoglierò « a fattore comune ». È come se avessimo tante mele di una grandezza non ancora nota: sussiste la condizione che in ogni caso esse abbiano ad essere tutte di eguale grandezza, poichè le x devono significare, in tutti i termini scritti, una stessa cosa, o per lo meno grandezze eguali. Questa esigenza o condizione è indipendente dalla provvisoria non conoscibilità della grandezza che si sta cercando: poichè, quando dico che 7 mele + 13 mele + 9 mele — 2 mele più il numero 25 formano un numero eguale a 106, non ho affatto bisogno di sapere quanto grosse sieno le mele. So solo che si tratta di una somma di grandezze della stessa specie alla quale aggiungo il numero 25. Potrei scrivere la mia equazione semplicemente:

$$(7 + 13 + 9 - 2)x + 25 = 27x + 25 = 106$$

ma questo non mi fornisce ancora la soluzione. Nel primo esempio io avevo portato tutte le costanti da una parte (nel secondo « membro » dell'equazione) a destra del segno =. Facciamo anche qui lo stesso: cadremo in quella forma di equazione già vista:

$$n\,x = b \quad 27x = 106 - 25 = 81$$

che dà per x

$$x = \frac{b}{n} \text{ cioè } x = \frac{81}{27} = \frac{9 \cdot 9}{9 \cdot 3} = \frac{9}{3}.$$

Ora può darsi il caso che le equazioni sieno formate unicamente da lettere: è questo il caso più frequente in matematica:

$$nx + a + b - c = d - mx.$$

Qui manca ogni possibilità di rappresentarci quel che l'espressione significa. Si afferma in vero che a, b, c, d, n, ed m sono conosciute e si chiede che la x incognita venga espressa in modo da presentarsi come combinazione di queste « costanti ». Per es. così:

$$x = \frac{d - a - b + c}{n + m}$$

ma questo, sia detto di passata, rappresenta appunto *la soluzione dell'equazione*. Come arrivare a questo « mostro » di espressione generale? quali calcoli eseguire? e, dato

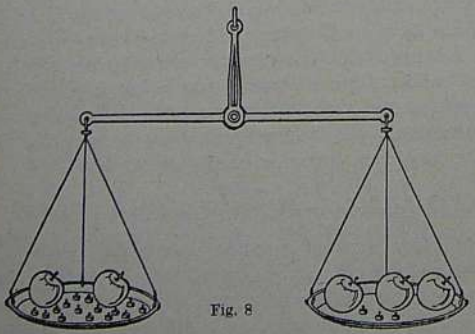


Fig. 8

che ci si possa riuscire, che sicurezza si ha che l'espressione scritta soddisfi effettivamente al comando di stabilire una eguaglianza?

Senza fare affermazioni matematiche, soccorriamo la nostra immaginazione con un modello; rappresentiamoci l'equazione come una bilancia (fig. 8). Su di un piatto abbiamo messo tante costanti (pesini) e tante incognite (mele). Per eseguire il comando di stabilire l'eguaglianza dei pesi, dobbiamo stabilire l'equilibrio nella bilancia e allora avremo la perfetta eguaglianza, la equazione dei pesi. Se dunque l'equilibrio della bilancia è distrutto, dobbiamo ristabilirlo a rischio di contravvenire al comando ricevuto. Nella bilancia abbiamo posto dei pesini calibrati che rappresentano « costanti » e delle mele, di peso non ancora noto, che rappresentano le incognite.

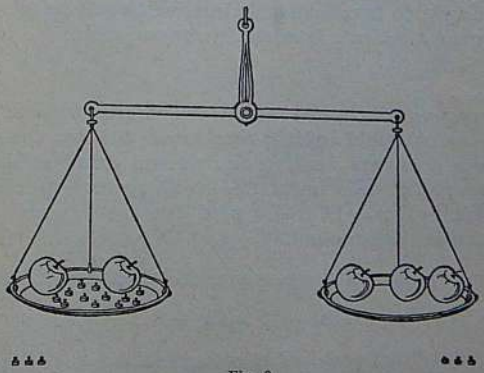


Fig. 9

Il nostro quesito è quello di determinare il peso di una mela, partendo da una disposizione alla rinfusa di mele e pesini sui piatti della bilancia equilibrata. Disponiamo la nostra bilancia in relazione per es. all'equazione:

$$2x + 15 = 3x + 3.$$

Su di un piatto avremo 2 mele e 15 pesini da 10 grammi ciascuno, sull'altro 3 mele e 3 pesini di 10 grammi. Dob-

biamo ora fare degli spostamenti, senza sbilanciare, finchè possiamo sapere quanto pesa una mela. L'indice della bilancia ci farà subito avvertiti quando l'equilibrio è rotto: dovremo allora ristabilirlo. Se volessimo mantenere l'equilibrio in modo assoluto, allora basterebbe lasciar stare le cose come sono. Ma allora dove va la nostra azione? Cerchiamo dunque di portare in un piatto sole mele e nell'altro soli pesini, fino a ridurci se possibile ad avere su di uno dei piatti una mela sola. In quanto ai pesini è chiaro che se ne tolgo da entrambi i piatti un numero eguale, non turbo l'equilibrio della bilancia. Togliamone per es. 3 dal piatto destro e 3 dal sinistro, il che si può fare facilmente: matematicamente ciò corrisponde a scrivere la nostra equazione così:

$$2x + 12 = 3x$$

ma posso anche, senza turbare l'equilibrio, togliere due mele da entrambi i piatti: rimarranno a destra una sola mela e a sinistra i soli pesini: che mi danno subito il peso cercato della mela. Matematicamente questo si esprime con $x = 12$ il che vuol dire che la mela pesa $12 \times 10 = 120$ grammi.

Controprova: la nostra equazione di partenza era

$$3x + 15 = 3x + 3$$

mettiamo 12 al posto di x; otterremo:

$$2 \cdot 12 + 15 = 2 \cdot 12 + 3$$

ossia

$$24 + 15 = 36 + 3$$

$$39 = 39$$

cioè una identità. E così abbiamo stabilito, per via meccanica e puramente intuitiva, una regola importantissima: sappiamo ora che l'equazione non cambia se togliamo o se aggiungiamo le stesse quantità a destra e a sinistra del segno di eguaglianza. Potevamo arrivare a

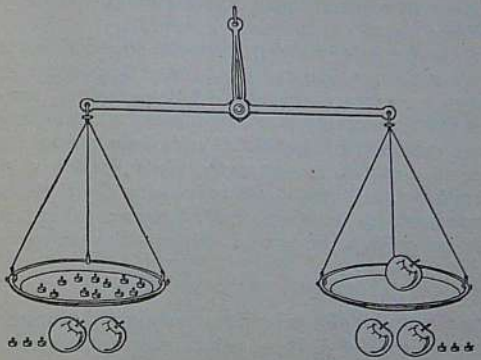


Fig. 10

questo risultato anche senza bilancia e col solo ragionamento. Per es. in base a quello che avevamo detto sulle frazioni, che, moltiplicando sopra e sotto per uno stesso numero n la frazione, per es. $\frac{n \cdot a}{n \cdot b} = 1$ non cambia. Ora questo si scrive anche

$$na = nb \qquad a = b.$$

Notiamo ancora: tutto ciò non vale che in quanto si sia trovato o calcolato per x il valore esatto, altrimenti non ci sarebbe eguaglianza.

Ma possiamo estendere la nostra immagine della bilancia: senza più disegnarla, fidandoci della nostra sola fantasia. È evidente che l'equilibrio sussisterebbe se moltiplicassimo sia il numero dei pesini che quello delle mele per uno stesso numero: per 2, per 3, per 100 oppure per $\frac{1}{2}$, per $\frac{1}{3}$ ecc. (il che equivarrebbe a dividere per

2 e per 3) o ancora quando facessimo una elevazione a potenza eguale di entrambi i membri.

Se invece dei piatti della bilancia, consideriamo il lato a sinistra o «primo membro» ed il lato a destra del segno $=$ o «secondo membro» della equazione, possiamo dire che se moltiplichiamo, dividiamo, o eleviamo a potenza entrambi i membri dell'equazione per uno stesso numero, l'equazione non varia. Nella pratica si ricava da questa regola una mossa cabalistica che si chiama lo spostamento di grandezze nell'equazione e l'isolamento della incognita x. Se per es. abbiamo l'equazione

$$5x - 4 + 16 = 2x + 8$$

formeremmo subito nel primo membro il numero costante $12 = (-4 + 16)$ – primo raggruppamento delle costanti – e otterremmo:

$$5x + 12 = 2x + 8.$$

Portiamo ora tutte le costanti nel secondo membro e tutte le incognite nel primo. Per far questo noi sottrarremo prima $2x + 8$ da entrambi i membri:

$$\begin{array}{rr} 5x + 12 = & 2x + 8 \\ -2x - 8 = & -2x - 8 \\ \hline 3x + 4 = & 0 \end{array}$$

Ma come! Otteniamo per risultato zero? $3x + 4$ è uguale a zero? Si. Abbiamo solo scritto la nostra equazione nella forma solitamente usata. Continuiamo senza timore e portiamo tutte le costanti o meglio la costante 4 nel secondo membro e lasciamo le incognite (o meglio la x) nel primo; lo faremo con una seconda sottrazione:

$$\begin{array}{rr} 3x + 4 = & 0 \\ -4 = & -4 \\ \hline 3x = & -4 \end{array}$$

e così facciamo scomparire quel tremendo zero. Siamo vicini alla soluzione. Per isolare ancora la x, basta dividere entrambi i membri dell'equazione per 3: otterremo finalmente: $x = -\frac{4}{3}$. L'equazione è risolta.

Facciamo ora la controprova, mettendo nella equazione di partenza $-\frac{4}{3}$ al posto di x troveremo:

$$5\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+12=2.\left(-\frac{4}{3}\right)+8$$

$$-\frac{20}{3}+\frac{36}{3}=-\frac{8}{3}+\frac{24}{3}$$

riducendo tutto in terzi

$$\frac{16}{3}=\frac{16}{3}.$$

La controprova conferma l'esattezza delle nostre operazioni.

E ora spieghiamo lo « spostamento di membro », chè il modo di procedere qui sopra seguito è troppo faticoso. Serviamoci sempre della stessa equazione:

$$5x+12=2x+8$$

e osserviamo che possiamo passare le costanti e le incognite direttamente da un membro all'altro, semplicemente cambiando di segno il termine spostato: se portiamo il 12 a destra gli daremo il segno —, e così se portiamo il 2x a sinistra, gli daremo pure il segno —. Questo risulta del resto dai passaggi sottrattivi che abbiamo eseguito testè: avremo dunque:

$$5x-2x=8-12$$

ossia

$$(5-2)x=-4$$

$$3x=-4$$

Per trasportare anche il 3 a sinistra, con la costante — 4, osserviamo che esso compare qui come fattore e quindi dobbiamo stavolta dividere entrambi i membri per 3; ciò che avevamo già fatto in un esempio precedente; quindi: $x = -\frac{4}{3}$.

Abbiamo finito e abbiamo anche trovata la nostra regola. Che si enuncia: quando si passa un termine dell'equazione da un membro all'altro, lo si deve cambiare di segno. Se ha il segno di addizione gli si deve dare il segno — di sottrazione e viceversa. Se un termine fosse moltiplicato per un fattore si deve dividere in entrambi i membri per questo fattore stesso, se è diviso per un dato fattore si deve moltiplicare e infine se il termine è elevato a potenza si deve estrarre la radice di quella stessa potenza in entrambi i membri e viceversa.

E ora siamo pronti ad affrontare qualunque equazione: almeno finchè in essa l'incognita sia solo alla prima potenza (queste equazioni si dicono anche lineari, perchè si possono rappresentare geometricamente con una linea retta come vedremo più avanti).

Calcoliamo ora a mo' d'esempio alcuni problemi un pochino più complicati:

$$\begin{aligned} 5\,(x-2) - 2x &= 2(x-1) \\ 5x - 10 - 2x &= 2x - 2 \\ 3x - 10 &= 2x - 2 \\ (3-2)x &= -2 + 10 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Altro esempio, con sole lettere:

$$\begin{aligned} a(b-c+d) - b(a+c-d) &= ab - (bc - bd - x) \\ ab - ac + ad - ba - bc + bd &= ab - bc + bd + x \\ ab - ac + ad - ab - bc + bd - ab + bc - bd &= x \\ -ab - ac + ad &= x \\ x &= a(-b - c + d). \end{aligned}$$

Qui vediamo che è permesso di scambiare di membri i termini, poichè è la stessa cosa se scriviamo $5 = x$ o $x = 5$. Se tutti i termini in un membro sono negativi e così pure tutti i termini dell'altro membro, possiamo renderli tutti positivi moltiplicando da una parte e dall'altra per -1:

$$\begin{aligned} -x &= -10 \\ (-x)\cdot(-1) &= (-10)\cdot(-1) \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Una siffatta moltiplicazione si pratica sempre quando la x isolata appare col segno negativo. Se come risultato si avesse $-x = (\pm a)$ si può scrivere o semplicemente pensare:

$$\begin{aligned} (-x)\cdot(-1) &= (\pm a)\cdot(-1) \\ x &= \mp a \end{aligned}$$

Il doppio segno di a è stato anche capovolto. $\pm a$ è diventato $\mp a$ per significare il cambiamento di segno avvenuto.

Ora, si danno dei casi in cui un'equazione ci appare insolubile per noi – allo stato presente della nostra preparazione – perchè la x compare ad una potenza più alta della prima, per es. in $(x + 1)(x - 1) = x^2 + x + 1$.

Esaminiamo bene se questo non sia pura apparenza e non allarmiamoci prima di averci guardato dentro. Vediamo:

$$\begin{aligned} x^2 + x - x - 1 &= x^2 + x + 1 \\ x^2 - x^2 + x - x - x &= 1 + 1 \\ -x &= 2 \\ \text{o} \qquad x &= -2. \end{aligned}$$

Così pure l'equazione $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = 2$ ci appare molto difficile: pura apparenza ! Vediamo: portiamo tutto a denominatore comune.

$$\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=2$$

$$\frac{x+1-x+1}{x^2-x+x-1}=2$$

$$\frac{2}{x^2-1}=2$$

Questo è lo stesso che:

$$2=2(x^2-1)$$
$$2=2x^2-2$$
$$1=x^2-1$$
$$x^2=2 \qquad x=\pm\sqrt{2}.$$

Qui ci troviamo ad aver risolto un'equazione di secondo grado. Vedremo più avanti il significato del doppio segno. Limitiamoci qui a far notare che una equazione di 2° grado ammette sempre due soluzioni.

Altro esempio ancora:

$$\frac{5+x}{2}+\frac{13+7x}{3}=72$$

$$\frac{(5+x)\cdot 3+2\cdot(13+7x)}{2\cdot 3}=72$$

$$(5+x)\cdot 3+2\cdot(13+7x)=72\times 2.3$$
$$15+3x+26+14x=432$$
$$17x=432-15-26$$
$$=391$$

$$x=\frac{391}{17}=23$$

Ancora un'osservazione d'indole generale: Il calcolo con equazioni è una delle operazioni più importanti della matematica. Si sono trovati infiniti artifizi e astuzie

matematiche per facilitarlo. L'arte di questi calcoli deve essere così famigliare al calcolatore, da potergli permettere di eseguire le operazioni quasi inconsciamente, come noi tutti facciamo le moltiplicazioni. Un'operazione sbagliata deve finire, con l'abitudine, per colpirci come una nota falsa ferma il musicista che sta suonando, anche lui più o meno inconsciamente. Quanta più attenzione si pone nei primi esercizi graduali, tanto più profondamente si viene ad imprimere nel subcosciente l'operazione che poi si compie quasi inconsciamente (automaticamente dicono gli psicologi). Quindi la via maestra alle matematiche, la « via regale » è quella di esercitarvisi continuamente. L'esercizio è altrettanto divertente quanto qualunque altro di enigmistica o di parole incrociate.

Questo esercizio sviluppa quel sesto senso che sovente stupisce i non iniziati. La matematizzazione del cervello diventa quasi un fenomeno fisico e s'acquista con l'esercizio allo stesso modo che l'abilità nel nuoto o nel pattinaggio.

Prima di estendere il nostro concetto di equazione vediamo di risolvere un problema alquanto involuto.

Un padre è sui 48 anni, suo figlio ne ha 21: che età aveva il figlio quando il padre aveva dieci volte l'età del figlio e da quanti anni questo è avvenuto?

Ragioniamo così: la differenza di età tra padre e figlio è ora di 27 anni, e questa differenza è una grandezza che non varia (una costante). Diciamo x l'età del figlio quando il padre era dieci volte più vecchio di lui. Il padre era allora di età $x + 27$ anni e questa età era $10\,x$ volte l'età del figlio. Allora sarà $x + 27 = 10\,x$. Questa è l'« impostazione » dell'equazione.

Ora non abbiamo più da ragionarci sopra: basta lasciare agire il nostro algoritmo:

$$x + 27 = 10\,x$$
$$27 = 9\,x$$
$$x = \frac{27}{9} = 3$$

Il padre aveva 30 anni quando il figlio ne aveva 3 e questo fatto è avvenuto $48 - 30 = 18$ anni fa. La soluzione vien da sè una volta bene impostata l'equazione.

Si potrebbe anche impostare l'equazione in quest'altro modo: ponendo direttamente come incognita x l'intervallo di tempo trascorso da che il padre aveva dieci volte l'età del figlio. Allora ragioneremo dicendo: il padre ha ora 48 anni; $48 - x$ anni fa aveva 10 volte l'età del figlio. Poichè il figlio ha ora 21 anno, cio avvenne $21 - x$ anni fa. Allora l'equazione va impostata a questo modo:

$(48 - x) = 10\,(21 - x)$ ossia $21 - x = \frac{1}{10}\,(48 - x)$

Risolviamo la prima equazione:

$$48 - x = 10\,(21 - x)$$
$$48 - x = 210 - 10x$$
$$9x = 210 - 48$$
$$9x = 162$$
$$x = \frac{162}{9} = 18$$

Ci sarebbe ancora un terzo modo d'impostare il calcolo: poichè il padre ha 27 anni più del figlio, a 27 anni gli nasceva il figlio. Quando l'età del figlio era $\frac{1}{10}$ di quella del padre, questi era invecchiato di $\frac{1}{9}$ della anzidetta differenza di età, cioè di 3 anni per avere dieci volte l'età del figlio. Questo gli accadde a $27 + 3$ anni, cioè quando il figlio compiva il suo terzo anno.

Tutto questo unicamente per mostrare quale abbon-

danza di possibilità di trasformazioni si presentano già con semplicissime equazioni che offrono all'abilità del calcolatore il modo di trovare la via più rapida ed elegante per la loro soluzione.

Auguro al lettore di acquistare questa abilità, precisione ed eleganza, fonte di intime soddisfazioni intellettuali.

E terminiamo con una storiella — storica davvero: — Sulla tomba di Diofanto fu scolpita una iscrizione sibillina che doveva dar ragione della età in cui la morte lo colse. Per chi non lo sapesse, Diofanto fu un celebre matematico greco che visse in Alessandria, nel quarto secolo dopo Cristo: fu un geniale aritmetico e algebrista: il solo forse della Grecia – perchè gli altri furono piuttosto dei geometri. La matematica Ipazia, di cui abbiamo già parlato, ne commentò la « Arithmetica » che Raffaele Bombelli nel 1572 incluse nella sua Algebra (1).

Ebbene, la iscrizione sulla sua tomba pone il seguente enigma che in parole povere suona così: « Questa tomba copre Diofanto, il meraviglioso. — La pietra ti dirà l'età del defunto. Un Dio gli prestò un sesto della sua vita per esser fanciullo, e ne aggiunse un dodicesimo fino a che gli spuntò la barba sulle gote. Dopo un altro settimo della sua vita prese moglie la quale gli regalò un figlio dopo cinque anni di matrimonio. Infelice fanciullo! raggiunta la metà dell'età del padre, se lo prese l'Averno. Il piangente Diofanto gli sopravvisse quattro anni, insegnando l'arte dei numeri.

Lasciamo la poesia dei distici greci e proviamo con la fredda matematica a risolvere l'enigma dell'età di Diofanto. Dovremo combattere con le frazioni pure, tanto care ai greci, ma un'equazione (di quelle che già lo stesso Diofanto insegnava a risolvere) ci permetterà di giungere rapidamente allo scopo.

(1) Vedi anche G. Loria: Le scienze esatte nell'antica Grecia 1914, pagg. 845-919.

Chiamiamo dunque x l'età incognita del matematico greco e sommiamo quelle frazioni della sua vita con gli intervalli di cui parla la sua tomba. Ecco:

$\frac{1}{6}$ di x fu fanciullo;

$\frac{1}{12}$ di x gli occorse in più per vedersi spuntare l'onor del mento;

$\frac{1}{7}$ di x dopo prese moglie, poi

5 anni trascorsero lieti fino alla nascita del figlio il quale gli muore « Nel mezzo del cammin » della sua vita cioè a

$\frac{1}{2}$ x anni. E dopo

4 anni, Diofanto lo segue nella tomba.

Ecco l'iscrizione in prosa, ed eccola in equazione:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$$

Riducendo a denominatore comune, si ha:

$$\frac{14x}{84}+\frac{7x}{84}+\frac{12x}{84}+\frac{420}{84}+\frac{42x}{84}+\frac{336}{84}=\frac{84}{84}x$$

ossia:

$$\begin{aligned} 14x+7x+12x+420+42x+336 &= 84x \\ 75x+756 &= 84x \\ 756 &= 9x \end{aligned}$$

$$x=\frac{756}{9}=84 \text{ anni.}$$

Così tradurremo l'epitaffio: Diofanto fu fanciullo fino a 14 anni; gli spuntò la barba a 21, a 33 anni prese moglie, a 38 gli nacque il figlio: il quale visse 42 anni cioè fino a che Diofanto aveva raggiunto 80 anni. Si capisce quindi come il dolore per la perdita del figlio abbia ucciso il povero vecchio quattr'anni dopo.

Capitolo XIII

EQUAZIONI INDETERMINATE

Non per nulla abbiamo evocato lo spirito di Diofanto: questo grande algebrista sembra difatti esser stato lo scopritore o l'inventore, se più vi piace, di una singolare categoria di equazioni che portano il suo nome: le equazioni indeterminate. Quel che si debba a lui è altrettanto indeterminato quanto le equazioni stesse: gli storici delle matematiche non sanno bene dire che cosa giustifichi l'appellativo di diofantiche che si dà a queste equazioni: ma tant'è, il nome è loro rimasto e noi lo conserveremo.

Che cosa sono queste equazioni diofantiche, doppiamente enigmatiche? Vediamolo da un esempio, un po' involuto, e con esso procederemo alla scoperta e all'esame delle caratteristiche di queste importantissime equazioni e impareremo a trattarle e a risolverle.

Chiediamoci per es.: Quali sono quei due numeri, il primo dei quali, preso otto volte e aumentato di tre volte il secondo, danno per somma 91? A un tal quesito non possiamo rispondere lì per lì con l'attuale nostra sapienza algebrica; poichè ci appare subito evidente che qui le incognite sono due. Incominciamo a chiamarle x ed y e scriviamo il nostro quesito così:

$$8x + 3y = 91.$$

E ora, che cosa faremo? Dalle regole fin qui imparate possiamo tutt'al più scrivere $x = \frac{91 - 3y}{8}$, oppure $3y = 91 - 8x$, ed $y = \frac{91 - 8x}{3}$; ma più in là non ci sembra di poter andare e la soluzione rimane ancora in alto mare. Perchè non abbiamo fatto che esprimere una in-

cognita per mezzo dell'altra. Un certo fiuto matematico ci suggerisce di prendere per x il numero 5 e per y il numero 17 e allora risulterebbe:

$$8 \cdot 5 + 3 \cdot 17 = 40 + 51 = 91$$

il che sarebbe una soluzione: ma è la sola? Eppoi, la Matematica non tira a indovinare!

Dobbiamo dunque anche qui cercare un algoritmo, secondo una certa cabala, che ci conduca sicuramente alla meta; e vogliamo imporci una condizione: di limitarci ai numeri interi, altrimenti potremmo avere infinite possibili soluzioni. Consideriamo x come una costante, dandole un valore intero qualunque, per es. 7 e allora potremo scrivere $8 \cdot 7 + 3y = 91$ da cui ricaviamo subito $3y = 91 - 56 = 35$ ed $y = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$

Avremmo così, con la scelta arbitraria di un valore di x (o di y), ricondotta l'equazione ad una forma in cui figura una sola incognita e che sappiamo risolvere.

Ma ci siamo imposti anche di trovare una soluzione intera per entrambe le variabili. La soluzione qui sopra non soddisfa a questa condizione. Prima però di spiegare il geniale metodo generale di soluzione, che dobbiamo ad Eulero, è bene che impariamo a conoscere un certo « trucco » matematico assai usato e che ha una parte assai importante in questo metodo. È il trucco della « sostituzione ».

Scegliamo un esempio concreto. Nessuno vorrà dirmi che l'equazione

$$2\left(\frac{x-4}{3}\right) + 3\left(\frac{x-4}{3}\right) - 4\left(\frac{x-4}{3}\right) = 9 - 2\left(\frac{x-4}{3}\right)$$

sia molto persuasiva. Esaminandola bene, però, notiamo che l'espressione tra parentesi $\frac{x-4}{3}$ è più volte ripetuta e che la incognita x non si trova che in questa costellazione.

Io potrei allora assumere questa $\left(\frac{x-4}{3}\right)$ come nuova incognita o grandezza indeterminata e trattarla per es. come se fosse una mela. Chiamiamo m questa mela e scriviamo:

$$2m + 3m - 4m = 9 - 2m$$

e non preoccupiamoci per il momento di che cosa sia m. Io non chiedo come sia fatta la mia mela, quanti semi essa contenga, come sia fatto il suo pippolino o che forma o colore abbia. So che ho un'equazione in cui sono in giuoco delle mele e mi affido per modo di dire ad un algoritmo per cercare anzitutto da quale numero, da quali costanti dipenda la mia mela. Poi, così, lo spero, potrò esaminare in dettaglio come la mela sia fatta.

La nostra nuova equazione ci fornisce subito il valore di m: infatti, raccogliendo m a fattor comune, troviamo $3m = 9$ e $m = 3$.

E ora so che m, che è uguale a $\left(\frac{x-4}{3}\right)$ è uguale a tre, cioè posso scrivere una nuova equazione

$$\frac{x-4}{3} = 3$$

che mi dà

$$x = 3 \cdot 3 + 4 = 13.$$

Lascio al lettore di calcolare l'equazione in qualche altro modo, senza sostituzione. Mi basta avergli mostrato in che cosa consista una siffatta « sostituzione »: è l'indicazione semplificata, « simbolica », di una grandezza a struttura più complicata.

Almeno al punto in cui ora ci troviamo.

Nelle matematiche superiori può anche darsi il caso inverso, di dover sostituire una espressione semplice con un'altra più complicata. Del resto, conosciamo già alcuni siffatti casi: Quando noi, per una ragione qualsiasi,

scriviamo al posto di t per es. 15° o immaginiamo che b sia formato da $b^1 \cdot b^\circ$ non facciamo altro che una sostituzione di enti matematici semplici con altri più complicati.

Per serbare la massima generalità, diremo che per sostituzione s'intende, senz'altro, il mettere una espressione al posto di un'altra che si ritiene eguale alla prima. Naturalmente non così, a casaccio: nessuno per es. vorrà sostituire una x (incognita) con una costante: per es. u. Però si potrà sempre al posto di una espressione in cui entra la x, scrivere una costante u ma sempre ricordando questa premessa: $u = mx$ che si chiama l'« equazione di condizione ». Tale era la premessa fatta sopra: $m = \left(\frac{4-x}{3}\right)$.

Visto che cos'è una sostituzione, a che titolo siamo autorizzati a farla? Logicamente la cosa è spiegabile. Qui ci troviamo in un caso che i matematici chiamano di *isomorfismo* cioè di identità di forma.

La struttura, la forma dell'equazione, non viene per nulla modificata dalla sostituzione: e neppure le operazioni di calcolo. I coefficienti e gli operatori rimangono gli stessi. Algebricamente noi abbiamo creato un sistema di più equazioni, cioè abbiamo aggiunto alla equazione fondamentale una seconda equazione, « di condizione ». Nel caso esaminato:

$$2\left(\frac{x-4}{3}\right) + 3\left(\frac{x-4}{3}\right) - 4\left(\frac{x-4}{3}\right) = 9 - 2\left(\frac{x-4}{3}\right)$$

è

$$\frac{x-4}{3} = m.$$

Ma questo non basta per giungere infine alla equazione diofantica. Come già accennato sopra, noi dobbiamo eseguire una determinata specie di sostituzione, aggiungere altri requisiti all'equazione di condizione.

Scriviamo l'esempio da noi dato di equazione diofantica $3y + 8x = 91$ sotto forma un po' diversa.

Il metodo di Eulero ci prescrive anzitutto di esprimere una delle incognite per mezzo dell'altra e, per certe ragioni pratiche, di esprimere la incognita avente il coefficiente più piccolo «in funzione» (1) della incognita dal coefficiente più grande. Nel nostro caso la y in funzione della x:

$$3y = 91 - 8x$$

$$y = \frac{91 - 8x}{3}$$

Questo sarebbe il primo passo. E ora, sempre secondo Eulero, dobbiamo dividere questa frazione nelle sue parti intere e nelle sue parti frazionarie, così:

$$y = \frac{91}{3} - \frac{8x}{3} = 30 + \frac{1}{3} - 2x - \frac{2x}{3}.$$

Ora separiamo gli interi dai resti frazionari:

$$y = 30 - 2x + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x = 30 - 2x - \frac{2x - 1}{3}.$$

Per ragioni pratiche abbiamo scritto $-\frac{2x-1}{3}$ invece di $+\frac{1-2x}{3}$ il che non ne modifica il valore.

E ora comincia il vero calcolo: noi abbiamo presupposto che la y debba essere un numero intero. E poichè anche la x dev'essere un numero intero, dovrà parimenti essere $30 - 2x$ un numero intero e così pure dovrà risultare intera la somma algebrica $30 - 2x - \frac{2x-1}{1}$, cioè anche $\frac{2x-1}{3}$ dovrà essere un numero intero, altrimenti decadono le altre condizioni.

(1) Vedremo più avanti che cosa significhi questa espressione ormai adoperata anche nel linguaggio comune.

E ora facciamo la sostituzione: noi affermiamo « a priori » che $\frac{2x-1}{3}$ è un numero intero e lo indichiamo con n_1 (con l'indice 1 per seguirlo nelle sostituzioni). Avremo:

$$\frac{2x-1}{3} = n_1 \text{ (numero intero).}$$

Trasformiamo questa nuova equazione in modo da esprimere x in funzione di n_1, avremo:

$$\begin{aligned} 3n_1 &= 2x - 1 \\ 2x &= 3n_1 + 1 \\ x &= \frac{3n_1+1}{2}. \end{aligned}$$

Ora io posso rappresentare la x con interi n_1 e con frazioni di n_1 così:

$$x = \frac{3n_1}{2} + \frac{1}{2} = n_1 + \frac{n_1}{2} + \frac{1}{2} = n_1 + \frac{n_1+1}{2}$$

Per le considerazioni fatte sopra, poichè x e n_1 sono numeri interi anche $\frac{n_1+1}{2}$ dovrà essere un numero intero: chiamiamo n_2 questo nuovo numero

$$\frac{n_1+1}{2} = n_2 \text{ (numero intero)}$$

cioè

$$\begin{aligned} 2n_2 &= n_1 + 1 \\ n_1 &= 2n_2 - 1. \end{aligned}$$

Così abbiamo fatto sparire tutti i resti frazionari e possiamo considerare risolta la nostra equazione. Solo abbiamo ancora un compito, non difficile, ma complesso: quello di ritrovare la x e la y dalle espressioni di n_2 e

di n_1. E poichè $n_1 = 2n_2 - 1$ e $\frac{n_1 + 1}{2} = n_2$ sarà $x = n_1 + \frac{n_1 + 1}{2}$ nient'altro che

$$2n_2 - 1 + n_2$$

ossia

$$x = 3n_2 - 1.$$

Per y però avevamo trovato come ultimo risultato:

$$y = 30 - 2x - \frac{2x - 1}{3},$$

cioè sarà

$$y = 30 - 2(3n_2 - 1) - \frac{2x - 1}{3}$$

ma $\frac{2x - 1}{3}$ non è altro che n_1 cioè $(2n_2 - 1)$ quindi

$$\begin{aligned} y &= 30 - 2(3n_2 - 1) - n_1 \\ &= 30 - 2(3n_2 - 1) - (2n_2 - 1) \\ &= 30 - 6n_2 + 2 - 2n_2 + 1 \\ &= 33 - 8n_2. \end{aligned}$$

Per maggior chiarezza scriviamo ancora queste soluzioni finali e generali della nostra equazione Diofantica, lasciando cadere all'n l'indice, ormai inutile. Avremo:

$$\begin{aligned} x &= 3n - 1 \\ y &= 33 - 8n. \end{aligned}$$

Controlliamo ora se la nostra soluzione « euleriana » è veramente esatta. Basterà mettere al posto di n un qualsiasi numero intero, compreso lo zero. L'equazione

$$8x + 3y = 91$$

dà:

per $n = 0$ $\quad x = 0 - 1 = -1$ ed $y = 33$

ossia $8 \cdot (-1) + 3 \cdot 33 = 91$

per $n = 1$ $x = 3 - 1 = 2$ ed $y = 33 - 8 = 25$
ossia $8 \cdot 2 + 3 \cdot 25 = 16 + 75 = 91$

per $n = -1$ $x = -3 - 1 = -4$ ed $y = 33 + 8 = 41$
ossia $8 \cdot (-4) + 3 \cdot 41 = -32 + 123 = 91$

per $n = 5$ $x = 15 - 1 = 14$ ed $y = 33 - 40 = -7$
ossia $8 \cdot 14 + 3(-7) = 112 - 21 = 91$

e così via.

Meraviglioso algoritmo questo! che ci permette di trovare infinite soluzioni a numeri interi per due incognite e per mezzo di una semplice formoletta algebrica.

La nostra prima soluzione trovata, così, a fiuto, con $x = 5$ e $y = 17$ non era dunque la sola e valeva per $n = 2$ per cui

$$x = 6 - 1 = 5$$

ed

$$y = 33 - 16 = 17.$$

Abbiamo introdotto le equazioni diofantiche solamente come mezzo per giungere ad uno scopo, come vedremo più avanti. Aggiungiamo però una cosa a cui avevamo fatto solo un accenno di passata: non tutte le equazioni a due incognite, della forma generale:

$$ax + by = c$$

(dove a, b e c sono numeri interi, positivi o negativi) sono in pari tempo diofantiche, cioè equazioni che danno come soluzione due x ed y costituite da numeri interi.

A caratterizzare una equazione diofantica è indispensabile una ulteriore condizione. Supponiamo di aver ridotta l'equazione alla sua forma più semplice. Per es. l'equazione:

$$9x + 12y = 51$$

alla forma

$$3x + 4y = 17$$

e l'equazione:

$$32x + 24y = 124$$

alla forma

$$8x + 6y = 31$$

Ecco: qui desta la nostra meraviglia – cosa mai scoperta prima – che la somma di due numeri pari dia un numero dispari. Poichè x e y essendo numeri interi 8x e 6y sono evidentemente numeri pari qualunque sia l'intero, positivo o negativo.

Noi affermiamo persino che l'equazione:

$$3x + 15y = 19$$

non è diofantica. Perchè non si ha solo la condizione che i coefficienti abbiano ad esser pari ma che i coefficienti di x e di y non debbano avere nessun fattore comune (nel caso specifico il 3) il quale non sia anche contenuto nella costante.

Consolidiamo questa nostra affermazione in una prova matematicamente valida e generale mediante un esempio:

$$9x + 12y = 51 \text{ diviso per } 3 \text{ dà}$$
$$3x + 4y = 17$$

3 e 4 non hanno fattori comuni; si tratta dunque qui senza dubbio di una equazione diofantica genuina la quale darà una soluzione a numeri interi. Secondo il metodo di Eulero, la soluzione è la seguente:

$$3x + 4y = 17$$
$$3x = 17 - 4y$$

$$x = \frac{17-4y}{3} = 5 + \frac{2}{3} - y - \frac{y}{3} = 5 - y - \frac{y-2}{3}$$

$$\frac{y-2}{3} = n \qquad y - 2 = 3n$$

$$y = 3n + 2$$
$$x = 5 - (3n + 2) - n = 3 - 4n$$

Per $n = 3$ si avrebbe quindi: $x = -9$, $y = 11$ e

$$3 \cdot (-9) + 4 \cdot 11 = -27 + 44 = 17.$$

In questo caso tutto procede liscio com'era da aspettarsi. Vediamone ancora la prova e rifacciamoci al caso generale. Nell'equazione

$$ax + by = c$$

a, b e c non devono più avere fattori comuni, altrimenti l'equazione non sarebbe ridotta alla sua forma più semplice. Ora a e b avrebbero ancora un fattore comune se come in $8x + 6y = 31$, 8 e 6 avessero per fattore comune 2. In generale si potrebbe dire che $\frac{a}{m}$ e $\frac{b}{m}$ sono ancora numeri interi: questi numeri interi sono rispettivamente moltiplicati per x e per y, che dovranno risultare interi ed i prodotti sommati fra di loro, così:

$$\frac{a}{m}x + \frac{b}{m}y .$$

Ora è evidente che anche c andrà diviso per m se si è diviso a e b per questo numero, perchè così vuole l'equilibrio dell'equazione. Allora: $\frac{a}{m}x + \frac{b}{m}y = \frac{c}{m}$ mentre l'equazione originale era $ax + by = c$. E poichè in questa prima equazione, c era un numero intero, dovrà, anche dopo la sua divisione per m risultare intero se dev'essere somma di due numeri interi.

Ora questo contraddice alla premessa che solo a e b sieno divisibili per m. Perciò una equazione della forma $m \cdot rx + m \cdot sy = c$ in cui c non è divisibile per m, non si potrà mai risolvere con numeri interi per entrambe le incognite se m, r, s e c sono numeri interi.

Ripetiamo la premessa: una equazione diofantica vuole

che i coefficienti di entrambe le incognite, non abbiano un fattore o divisore comune; per contro i coefficienti delle incognite e la costante possono avere un divisore comune, come per es. nell'equazione $3x + 4y = 12$ (4 e 12 hanno per divisori comuni il 4 e 3 e 12 il 3). Le soluzioni generalizzate di questa equazione sarebbero

$$x = 4 - 4n \quad \text{e} \quad y = 3n \quad \text{e cioè per}$$
$$n = 5 \quad \text{sarebbe} \quad x = 4 - 20 = -16$$
$$y = 15$$

Prova:

$$3 \cdot (-16) + 4 \cdot 15 = -48 + 60 = 12$$

Capitolo XIV

POTENZE NEGATIVE E FRAZIONARIE

Se senz'altro conducessimo più oltre la ricerca sulle equazioni, saremmo indotti in errore perchè incoglieremmo in un tipo di equazioni che ci sbarra la via verso la più alta matematica. Questo tipo è costituito dalla cosiddetta « funzione » dalla quale si derivano le equazioni algebriche.

Per ora vi prego di conferire a questo vocabolo « funzione » un significato provvisoriamente molto impreciso: i capitoli che seguiranno ci introdurranno via via in questo nuovo mondo delle meraviglie. E poichè noi potremo muoverci assai più liberamente nella teoria delle funzioni, quando avremo avuto la pazienza di estendere il nostro concetto di numero e di studiare a fondo l'algoritmo delle potenze, sobbarchiamoci subito a questa impresa.

Ricordiamoci che si dividono due potenze di eguale base, sottraendone gli esponenti: così $10^5 : 10^3 = 10^{5-3} = 10^2$ cioè $100\,000 : 1000 = 100$ oppure in generale $a^{17} : a^6 = a^{11}$ e così via.

Ma la sottrazione potrebbe dare per risultato un numero negativo; e allora? Che significato avrebbe ciò? Se per es. in $a^m : a^n$ fosse $m < n$?

Facciamo un caso concreto, che ci permetta di condurre avanti e a termine il calcolo. Si abbia dunque da eseguire $10^5 : 10^7 = 10^{5-7} = 10^{-2}$. Avremo:

$$10^5 : 10^7 = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{10 \cdot 10} = \frac{1}{100}$$

Quindi 10^{-2} non vuol dir altro che $\frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$.

Cominciamo a capire il nuovo algoritmo, ma per precauzione facciamo ancora una prova:

$$a^{11} : a^{16} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}$$

ossia $\frac{1}{a^5}$ e quindi sarà $\frac{1}{a^5} = a^{11-16} = a^{-5}$.

La regola che cercavamo si enuncia dunque semplicemente: una base con esponente negativo è uguale al reciproco della base stessa con esponente positivo. E, ridotto in pillola: $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$ dove a dev'essere diverso da zero.

Quest'ultima limitazione ha la sua buona ragione, perchè se la base a fosse zero, sarebbe $a^{-n} = \frac{1}{o^n} = \frac{1}{o}$. Ora questa espressione abbiamo visto essere equivalente a « lim ∞ ».

E di più non occorre dire su gli esponenti negativi. La nostra semplice regola ci permette dunque di estendere l'algoritmo delle potenze di un numero e di considerare espressioni come:

$$b^{(-4+3-2+6-8)} = b^{-5} = \frac{1}{b^5}$$

e di trattarle con la stessa sicurezza con la quale eseguivamo l'operazione $c^{5+4-3} = c^6$.

Dalla natura stessa del numero reciproco, ne discende che noi possiamo rappresentare $\frac{1}{a^n}$ come $a^\circ : a^n = a^{\circ - n} = a^{-n}$ mentre per contro sarebbe

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^0 : a^{-n} = a^0 : a^{0-(-n)} = a^n .$$

Così, per esemplificare la regola generale:

$$\frac{a^\circ}{a^n} = \frac{a^{-n}}{a^\circ} \text{ ed } \frac{a^\circ}{a^{-n}} = \frac{a^n}{a^\circ} \text{ ossia } \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

Estendiamo ancora il nostro algoritmo, affermando che dev'essere anche possibile di mettere come esponenti delle frazioni ordinarie. Per es. fare:

$10^{5/6}$, $a^{7/9}$, $15^{a/b}$, $20^{1/10}$, $4^{2/7}$ e così via.

Questa scrittura non ci dice nulla per ora: il comando di elevare una base a potenza frazionaria ci appare senza senso.

Anche quando io riducessi l'espressione $a^{5/6}$ ad $a^{5+1/6}$ mi troverei sempre ad aver da fare con potenze fratte $a^{5+1/6} = a^5 \times a^{1/6}$. Posso scrivere per es. $10^5 = 10.000$ ma come scrivere $10^{1/6}$? Questo numero non sarà certamente maggiore di 10 perchè $10^1 = 10$. Secondo ogni probabilità mi trovo dinanzi ad una operazione « litica » che sta alla elevazione a potenza come la divisione sta alla moltiplicazione o la sottrazione all'addizione.

Non crediamo di rivelare un gran mistero dicendo che qui si tratta di una nuova operazione di calcolo ordinario comandateci da quell'esponente frazionario: $1/2$, $1/3$, $1/6$ ...

Si tratta semplicemente dell'*estrazione di radice* seconda, terza (o cubica), sesta ecc.

Il comando $(100\,000)^{1/6}$ non vuol dir altro se non: «Cerca quel certo numero che moltiplicato sei volte per sè stesso ti riproduca 100 000».

E quando ci trovassimo dinanzi ad un'espressione generale del tipo $c^{a/b}$ possiamo scrivere $c^{a/b} = (c^a)^{1/b}$ che vuol dire che si deve cercare quel numero d, ancora sconosciuto, che moltiplicato b volte per sè stesso ci dia c^a cioè $d^b = c^a$.

Ora già da parecchi secoli l'operazione così comandata si indica col segno $\sqrt{\ }$ di radice che non è che la «stilizzazione» del *r* di «radice» espresso in quel latino, piuttosto grosso, che era la lingua dei matematici d'un tempo e che ora, trasformata più elegantemente in «Interlingua» dal compianto nostro prof. G. Peano, serve ancora come mezzo di comunicazione fra i dotti.

Dunque scriveremo indifferentemente:

$$\sqrt[2]{5816} = (5816)^{1/2} \quad \sqrt[3]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{1/3} \quad \sqrt[4]{a^2} = a^{2/4} \text{ ecc.}$$

L'*indice* della radice (che quando non è indicato (1) è sottinteso in radice seconda, o quadrata) non è dunque altro che il denominatore dell'esponente frazionario e, quando questo è una frazione pura non è che il reciproco della frazione. Così:

$$a^{1/2} = \sqrt[2]{a}\,; \quad 10^{5/6} = (10^5)^{1/6} = \sqrt[6]{10^5} \quad \text{e così via.}$$

Da questa esposizione si possono ricavare tutte le regole per il maneggio algebrico delle radici ed io raccomando di controllare ogni qualsiasi caso più compli-

(1) Non esiste possibilità di confusione perchè la radice prima di un numero, essendo il numero stesso, non richiede segno di radice.

cato di calcolo in cui entrino delle radici, mettendo queste sotto forma di esponenti frazionari.

$\sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[7]{a^9}$ non è che $a^{5/3} \cdot a^{9/7} = a^{5/3+9/7} = a^{\frac{7 \cdot 5 + 3 \cdot 9}{21}} =$

$$= a^{62/21} = (a^{62})^{1/21} = \sqrt[21]{a^{62}}.$$

Se la radice stessa è fratta, allora nella scrittura a potenze frazionarie ne indicheremo l'esponente col valore reciproco: $\sqrt[2/3]{a} = a^{3/2} = \sqrt{a^3}$

$$\sqrt[4/5]{a^3} = (a^3)^{5/4} = (a^{3 \cdot 5})^{1/4} = \sqrt[4]{a^{15}}, \text{ oppure}$$

$$\sqrt[4/5]{a^3} = \sqrt[4 \cdot 1/5]{a^3} = (a^3)^{5 \cdot 1/4} = (a^{3 \cdot 5})^{1/4}.$$

Naturalmente è anche possibile una divisione di radici, dalla quale operazione possono risultare esponenti positivi o negativi. Per es.

$$\sqrt[5]{a^6} : \sqrt[3]{a^7} = (a^6)^{1/5} : (a^7)^{1/3} = a^{6/5} : a^{7/3} = a^{\frac{6 \cdot 3 - 7 \cdot 5}{15}}$$

$$= a^{-\frac{17}{15}} = \sqrt[15]{a^{17}} = \sqrt[15]{a^{-17}} = \sqrt[15]{\frac{1}{a^{17}}} = \frac{\sqrt[15]{1}}{\sqrt[15]{a^{17}}}$$

Non abbiamo esaurito l'argomento della estrazione di radice, ma questo si trova spiegato in qualsiasi testo scolastico. Qui si è voluto unicamente studiare la natura intima di questo algoritmo nel quadro generale delle altre operazioni algebriche.

Capitolo XV

NUMERI IRRAZIONALI

Quando si cerchi di conoscere in quali condizioni, dal punto di vista più generale, una radice sia calcolabile, si trova per es. che $\sqrt[4]{a}$ fornisce uno schema chiaro dell'operazione quando si ponga a eguale ad un numero p^4, perchè allora $\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{p^4} = p^{4/4} = p$. Diciamo allora che p è la radice quarta di a. Vediamo se questa possibilità esiste sempre ed in ogni caso e prendiamo il caso più semplice, proponendoci come risultato un numero intero qualsiasi. Noi possiamo osservare subito che questo sarà un caso veramente straordinario, in quanto, nell'ambito dei cento primi numeri interi positivi, non ci sono, come quarte potenze, che 1, 16 e 81: ciò vorrebbe dire che qualsiasi numero intero compreso tra 1 e 100 che non sia uno dei tre ora elencati, non può rappresentare una quarta potenza di un numero intero e positivo. Il numero 25 per es. starà fra 2^4 e 3^4, il numero 90 tra 3^4 e 4^4 e così via. Ora in matematica questo «star frammezzo a due numeri» si esprime mediante una «diseguaglianza» e con segni di cui giova fare la conoscenza prima di procedere oltre. Se per es. voglio porre la condizione che il numero b stia fra 30 e 40 scriverò che b è maggiore di 30 e minore di 40 nel modo seguente: $30 < b < 40$. Se poi volessi aggiungere che b può eventualmente assumere anche il valore 30 o 40 scriverò: $30 \leq b \leq 40$ che a parole si legge: b compreso fra 30 e 40, limiti inclusi. Il procedimento si chiama «includere i limiti nella diseguaglianza».

In generale, in scrittura algebrica si scriverà $a < b < c$.

Qui non si conosce il valore reale dei limiti: si sa solo che essi sono designati con a e c e che dei tre numeri a, b e c, a è il numero più piccolo e c quello più grande.

Allora per servirci di questo metodo di notazione per la estrazione delle nostre radici, possiamo ripetere quello che abbiamo già detto sopra: che per es. 25 sta fra 2^4 e 3^4 e scrivere: $2^4 < 25 < 3^4$ e sarà pure evidente che $\sqrt[4]{25}$ non sarà un numero intero. Sarà quindi uno di quei numeri che si trovano in serie infinita, in tutte le gradazioni di valore, fra due numeri interi consecutivi e che possono essere numeri fratti o frazionari. Vediamo se c'è probabilità di trovare un numero fratto: poichè fra due numeri interi consecutivi qualunque, per es. fra 12 e 13 possiamo trovare dei numeri come $\frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$, $12\frac{7}{8}$ ecc.

Noi abbiamo fondate speranze che la nostra $\sqrt[4]{25}$ si possa risolvere se non con un numero intero, almeno con un numero frazionario, e poichè il 25 è compreso fra $2^4 = 16$ e $3^4 = 81$, noi pensiamo che la radice quarta di 25 avrà la forma di un numero come 2 seguito da una qualche frazione complicata – attorno al $2\frac{1}{4}$, – poichè già $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ elevato alla quarta potenza dà:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^4 = \frac{9}{4} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{9}{4} = \frac{6561}{256} = 25{,}63\ldots$$

Con la nostra stima grossolana abbiamo quasi imbroccato il valore della radice. Ora, abbiamo a disposizione un numero infinito di frazioni e possiamo aspettarci di trovarne una, un po' più piccola di $\frac{9}{4}$ che esprima esattamente il valore della radice cercata.

Ma questo procedere per tentativi sarebbe troppo faticoso e non ci darebbe la certezza di poter trovare la radice esatta.

Impostiamo allora il nostro problema in modo generale, il che non presenta difficoltà. I casi sono due: o nella n^{esima} radice di a questo a è eguale a p^n, (a e p essendo due numeri interi e positivi, oppure il nostro a giace tra due n^{esime} potenze di p e del numero intero immediatamente successivo $(p+1)$. Cioè:

$$p^n < a < (p+1)^n.$$

E poichè sappiamo di più che nel secondo caso la radice non sarà intera, ci chiederemo se essa potrà esprimersi con una frazione ordinaria $\frac{r}{s}$: allora dovrebbe essere $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\left(\frac{r}{s}\right)}$ perchè allora sarebbe $\left(\frac{r}{s}\right) = \left(\frac{r}{s}\right)^1 = \frac{r}{s}$. Naturalmente nè r nè s devono avere fattori comuni; devono esserne depurati ed $\frac{r}{s}$ ridotto alla più semplice espressione: Allora sarà $a = \left(\frac{r}{s}\right)^n$.

Prima di procedere oltre, devo far figurare che a è un numero intero, ciò che era la premessa di queste nostre considerazioni.

Ora se $\frac{r}{s}$ non hanno fattori comuni, io potrei elevare a potenza numeratore e denominatore, quanto mi pare, non troverei mai un fattore comune.

Per es. eleviamo $\frac{3}{5}$ a potenza; otterremo:

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \ldots \text{ fino all'infinito}}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \ldots \text{ fino all'infinito.}}$$

Anche l'n^{esima} potenza di $\frac{3}{5}$ ci darà un numeratore e un denominatore che non avranno fattori comuni e due siffatti numeri divisi l'uno per l'altro non potranno mai dare un numero intero. Quindi non si darà mai il

caso che il nostro a sia $\left(\frac{r}{s}\right)$ fintantochè si mantenga la premessa che a abbia ad essere un numero intero.

Veniamo allora alla conclusione scoraggiante di non potere mai trovare questa radice? No, ad un risultato arriveremo; poichè già il sondaggio fatto ci mostra che esso si trova nei pressi di $2^1/_4$. Apparentemente, oltre i numeri interi ed i numeri frazionari, esistono ancora altri numeri d'altro tipo che s'infiltrano negli intervalli delle frazioni più piccole.

Il risultato della nostra ricerca ci conduce a ciò che i pitagorici chiamavano « alogos » o inesprimibile, che è contrario alla ragione (« ratio » in latino). Ci sono dunque dei numeri incommensurabili, *irrazionali*, cioè che non hanno una comune misura (ratio) (1). Chiameremo per contrapposto *razionali* tutti gli altri numeri.

Ma come rappresenterò od esprimerò queste mostruosità numeriche, se non posso farlo nè con numeri interi nè con frazioni?

Se calcoliamo $\sqrt[4]{25}$ con i logaritmi (impareremo presto a conoscerli !) troviamo un numero 2.23606... I punti dicono che potremmo continuare all'infinito ad aggiungere cifra a cifra. È questa la caratteristica del numero irrazionale. Altro numero irrazionale conosciutissimo è il rapporto π della circonferenza al diametro, calcolato già da Archimede e scolpito, a sua gloria, come unico segno sulla pietra della sua tomba. Leibnitz, imitando in questo i greci, ha cercato di esprimere una determinata frazione di π cioè $\frac{\pi}{4}$ con una serie di numeri fratti:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

(1) Taluni matematici chiamano questi numeri «trascendentali» espressione questa che spaventa tanti non iniziati ma che non vuol dire altro che «non algebrici».

il che costituisce un secondo modo di esprimere un numero irrazionale con una serie di frazioni dei numeri dispari $\frac{1}{1}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{5}$ e con alternarsi dei segni (serie alternata).

Ma lasciamo per il momento le serie ed esaminiamo la «frazione decimale» che esprime il numero

$$\pi = 3{,}141592653589793\ldots$$

e quell'altra che esprime un numero altrettanto importante in matematica (1) di cui faremo più tardi la conoscenza:

$$e = 2{,}71828182845904523536\ldots$$

Il mio egregio contraddittore, che fin qui ha taciuto, mi richiama all'ordine dicendomi che non ho ancora spiegato che cosa sia una frazione decimale e che quindi non ho il diritto di scriverla con tanta disinvoltura. D'altra parte i più abili ed attenti miei lettori avranno certamente capito, che si danno casi in cui la divisione di un numero per l'altro non accenna mai a finire.

Noi abbiamo affermato in principio che i numeri irrazionali e le frazioni comuni sono assai diversi fra di loro, che quelli s'infiltrano fra le frazioni ordinarie riempiendo per così dire i vuoti tra una frazione e quella successivamente più grande o più piccola.

Faccio qui osservare, in generale, che stupisce di vedere che anche buoni calcolatori e allievi del ginnasio non si rendano sempre conto, per non averci pensato su (2) della differenza fra una frazione decimale ed un

(1) Il π è la prima lettera della parola greca περιφέρεια (periferia) del circolo di diametro 1). I francesi hanno messo in versi questa serie.

Que j'aime á faire apprendue.
Un nombre utile ane sages
Immortel Archimede, artiste ingenieur
Qui de ton jugement peut sonder la valeur?

(2) Anche questo i francesi hanno espresso con una frase: Tu aideras á rappeler la quantité á beauconp de docteurs amis,

(2) Anche Platone non ha desdegnato di riflettere sui numeri «alogos» o irrazionali. Aristotile nella «Epinomis» ci dice che Platone riteneva che le relazioni fra i numeri fornivano la chiave dell'intero mistero della natura.

numero irrazionale. La prima che è il risultato della divisione in una frazione numerica, è un numero che si completa, si chiude in sè stesso con un certo numero di cifre dopo la virgola.

Il numero irrazionale invece continua all'infinito senza mai chiudersi. Poichè in questi nostri tempi si abusa della parola « dinamica » chiamiamo pure dinamici i numeri irrazionali e, per contrapposto « statici » quelli decimali.

I numeri irrazionali non rappresentano una grandezza ma la tendenza verso una data grandezza. Quando noi diciamo che $\sqrt[4]{25} = 2{,}23$ o che $\pi = 3{,}14$ noi esprimiamo un valore, approssimato alla seconda cifra decimale, di queste grandezze, non il loro vero valore.

Capitolo XVI

FRAZIONI SISTEMATICHE

Potremmo ora dirigere il nostro studio sulle cosidette frazioni sistematiche di cui le frazioni decimali costituiscono un caso particolare, ma per non tediare il paziente lettore con teorie generali, ci limiteremo a qualche considerazione sul sistema decimale.

Un numero decimale per es.: 50341,7328 si può scrivere, come già sappiamo, sotto la forma:

$$5 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + \\ + 3 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-4}$$

che ne mostra l'intima struttura. Questo ci permette di definire la frazione sistematica decimale come la rappresentazione di un numero decimale in un sistema che tenga conto dell'ordine di grandezza delle cifre che lo compongono.

Prima di procedere, sarà però bene di presentare al paziente lettore un nuovo simbolo che ci permetterà di semplificare assai queste scritture: il simbolo cioè di « sommatoria » che è anch'esso un operatore, un comando. Lo si indica con l'S greco maiuscolo Σ (sigma). Ma questo non basta a definire la frazione sistematica, la somma; bisogna che ne fissiamo i limiti, ossia delimitiamo il « campo » nel quale noi la consideriamo. Ora un siffatto campo assume un significato solo se si tratta puramente di espressioni di eguale struttura, che debbano essere sommate fra di loro e che si contraddistinguano con indici. Come per es.:

$$a_1g^0 + a_2g^1 + a_3g^2 + a_4g^3 + a_5g^4 + a_6g^5.$$

Qui ogni termine della somma è composto da a e da g moltiplicati fra di loro e disposti in modo che l'esponente del g è di una unità inferiore all'indice di a.

Il numero sotto il segno Σ è la somma di tanti termini come ag della forma particolare $a_n \cdot g^{n-1}$: somma presa, nel caso sopra accennato, fra i limiti $n = 1$ e $n = 6$ per l'indice ed $n = 0$ ed $n = 5$ per l'esponente.

Si dice anche che l'indice n va per gradi, anzi per « gradini » dal limite inferiore zero a quello superiore $n = 6$. Ora questo andare, e qui faccio una delle osservazioni più importanti di tutto il libro, questo andare, dico, è per gradi, per *quantità discontinue*, o come si dice per *quantità discrete*. Come un salire per una scala a gradini di altezza determinata. In parole povere si « salta » da un indice al successivo, da un esponente al successivo, da un estremo del campo all'altro.

E qui, lettore mio, ti svelerò l'arcano che serberai per te, tanto per incoraggiarti: il terribile integrale che ancora ti incute rispettoso timore, non è altro che una somma di questo genere applicata a quantità discrete, specialissime, che permettono di ridurre di tanto i salti od i gradini che non t'accorgi nemmeno di salire. Se noi,

ora ci capacitiamo di quel che significa una sommatoria Σ avremo fatto un gran passo verso la comprensione dell'integrale. Perchè l'operatore sommatoria non è altro che un grossolano equivalente dell'operatore integrale. Il quale si scrive anche con un simbolo analogo: un $\int$ latino magro magro, e lungo lungo, il quale non dice altro se non che si deve eseguire una somma di termini.

Il mio contraddittore sta fremendo, e passandosi le dita nervosamente agitate nei capelli, per aumentarne il disordine: così torno alla nostra sommatoria. Ma, già, egli può aver ragione, stiamo parlando di integrali quando ancora non sappiamo bene che cosa sia una frazione decimale!

Dicevamo dunque dei limiti del nostro operatore « sommatoria » e del modo di indicarli. Noi possiamo scrivere:

$$\sum_{n=1}^{n=6} a_n \cdot g^{n-1} = a_1 g + a_2 g^1 + a_3 g^2 + a_4 g^3 + a_5 g^4 + a_6 g^5$$

il che vuol dire che dovremo dare nei successivi termini gli indici da 1 a 6 e gli esponenti da 0 a 5.

Logicamente si scrive il limite inferiore di n al disotto e quello superiore al disopra della sommatoria. Naturalmente si potrebbero avere gruppi di più di due cifre sotto la sommatoria ed anche ogni singolo fattore potrebbe essere affetto tanto da un indice quanto da un esponente. Questo vorrebbe dire che il numero (base) in quistione cambia da termine a termine come vogliono gli indici, mentre il suo esponente varierà in modo crescente o decrescente.

Per non rimanere nell'astratto, sapendo che l'operatore sommatoria presenta talvolta qualche difficoltà, noi faremo degli esempi e calcoleremo insieme qualche caso più o meno complicato. Osserviamo però ancora che la sommatoria costituisce veramente una notevole semplificazione nei calcoli, perchè permette di condensare in una formola delle espressioni che difficilmente si potrebbero scrivere per esteso.

Supponiamo di avere la sommatoria $\sum_{n=2}^{n=0} a^n b_{n+1} c_n^{n+2}$.

Come la svilupperemo? Semplicemente così:

$$a^2b_3c_2^4 + a^3b_4c_3^5 + a^4b_5c_4^6 + a^5b_6c_5^7 + a^6b_7c_6^8 + + a^7b_8c_7^9 + a_8b_9c_8^{10} + a^9b_{10}c_9^{11}.$$

Occorre naturalmente stare molto attenti: ma la necessaria attenzione che richiede una operazione qualunque e la sua difficoltà non sono nè in matematica nè del resto, nella vita, una sola e identica cosa.

Facciamo ora un caso pratico: Come potremo scrivere un sistema di frazioni sistematiche a quattro cifre nel sistema decimale?

Lo rappresenteremo anzitutto così:

$0 \cdot g^0 + \sum_{n=1}^{n=4} a_n \frac{1}{g^n}$ oppure così: $0 \cdot g^0 + \sum_{n=1}^{n=4} a_n g^{-n}$.

Lo sviluppo della prima sommatoria dà subito:

$$0 . g^0 + a_1 \frac{1}{g^1} + a_2 \frac{1}{g^2} + a_3 \frac{1}{g^3} + a_4 \frac{1}{g^4}$$

quello della seconda:

$$0 . g^0 + a_1 g^{-1} + a_2 g^{-2} + a_3 g^{-3} + a_4 g^{-4}$$

che è poi la stessa cosa. A parole: 0, unità, a, decimi, a_2 centesimi, a_3 millesimi, a_4 decimillesimi.

Potrei naturalmente cambiare i limiti: volendo per esempio scrivere una frazione decimale a p posti, scriverei in generale:

$$0 \cdot g^0 + \sum_{n=1}^{n=p} a_n g^{-n} = 0 \cdot g^0 + a_1 g^{-1} + a_2 g^{-2} + \ldots + a_p \, g^{-p}$$

e per una frazione decimale infinita scriverei:

$$0 \cdot g^0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n g^{-n} = 0 \cdot g^0 + a_1 g^1 + a_2 g^{-2} + \ldots \, a_\infty g^{-\infty}.$$

Il nostro nuovo algoritmo ci porta ai seguenti risultati:

1° Indice ed esponente in ogni gruppo a·g sono eguali in valore e contrari di segno.

2° Entrambi progrediscono per numeri interi, di unità in unità.

Non entriamo in maggiori particolari; accontentiamoci di esaminare ancora un sistema affatto singolare, assai impiegato, che si può ottenere con la cosidetta « serie alternata ». Proviamo per es. a scrivere la serie di Leibnitz, che già conosciamo,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

per un qualsiasi numero pari di termini e rappresentiamone anzitutto il comando di somma, la sommatoria. Chiamiamo 2m questo numero pari, dove m è un numero intero qualunque, e scriviamo:

Valore approssimato per

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{n=2m} \frac{1}{2n-1} (-1)^{n+1}$$

Rendiamoci conto come il nostro algoritmo funziona:

1° termine: $\frac{1}{(2\cdot 1)-1} \cdot (-1)^{1+1} = \frac{1}{1} \cdot (-1)^2 = +1$

2° termine: $\frac{1}{(2\cdot 2)-1} \cdot (-1)^{2+1} = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 = -\frac{1}{3}$

3° termine: $\frac{1}{(2\cdot 3)-1} \cdot (-1)^{3+1} = \frac{1}{5} \cdot (-1)^4 = +\frac{1}{5}$

4° termine: $\frac{1}{(2\cdot 4)-1} \cdot (-1)^{4+1} = \frac{1}{7} \cdot (-1)^5 = -\frac{1}{7}$

e così via,

Vediamo già che ritroveremo senz'altro la serie di Leibnitz e notiamo che tutti i termini di posto pari hanno indici dispari.

Il nostro segno magico di sommatoria ha funzionato a perfezione e abbiamo anche avuto la soddisfazione di osservare come la condizione, apparentemente inesprimibile con un simbolo, del regolare alternarsi dei segni + e — si inserisca in modo semplice nell'algoritmo così da approfittare di una proprietà delle potenze: le quali, applicate a basi negative, danno sempre valori positivi se gli esponenti sono pari, valori negativi se sono impari.

Per es. $(-a)^2 = (-a)(-a) = +a^2$
$(-a)^3 = (-a).(-a)(-a) = -a^3.$

Per quanto interessante questo algoritmo che raccomando allo studio dei miei più diligenti lettori, premettendo che qui non ho fatto che sfiorare l'argomento, torno alle mie serie sistematiche di frazioni, servendomi soprattutto di esempi. Premetto che qui non tratterò che delle cosidette « frazioni ridotte », cioè di quelle il cui « valore assoluto » è minore di 1, ed il cui numeratore e denominatore non hanno divisori comuni.

E qui si vanno accumulando ancora nuovi concetti. Ho parlato testè di « valore assoluto »: questa designazione sarà presto spiegata. È chiaro che l'espressione « più piccolo dell'unità » può avere un doppio significato: anzitutto quello che s'intende usualmente per questa espressione. Così diremo che $\frac{1}{2}$ è minore di 1 e così $\frac{4}{7}$.

In sostanza ogni vera frazione è minore dell'unità. Ma c'è un altro significato che deriva dall'introduzione dei numeri negativi: lo zero è certo minore dell'unità e tanto più lo saranno i numeri minori di zero: (— 1), (— 2)... ossia i numeri negativi.

Dobbiamo dunque considerare tre possibilità in un

numero: il suo valore positivo, quello negativo e il suo « valore assoluto » cioè senza alcun segno speciale.

Quando i matematici vogliono indicare un valore assoluto segnano il numero fra due tratti verticali, così: $|a|$. Sarà dunque $|5|$ maggiore di $|3|$ sebbene (-5) sia minore di $+3$. Il valore assoluto di $\frac{1}{2}$ cioè $\left|\frac{1}{2}\right|$ è sempre minore di $|1|$ e così ogni altra frazione vera.

Ciò premesso, rimettiamoci al lavoro e cerchiamo anzitutto di fissare il valore della frazione $\frac{3}{40}$. Eseguendo la divisione troviamo il valore 0,075 cioè una frazione decimale limitata alla terza cifra decimale: così analogamente $\frac{4}{125} = 0{,}032$. Ogni ragazzo sa poi che $\frac{1}{2} = 0{,}5$ e che $\frac{1}{5} = 0{,}2$. Quando dunque, seguendo il modo più generale di scrittura, indichiamo con p il numeratore di una frazione vera « ridotta » e con q il suo denominatore, vale la regola che ogni siffatta frazione comune fornisce un sistema finito quando il denominatore q è semplicemente formato dei due fattori primi 2 e 5 del 10, base del nostro sistema decimale. Così:

$$40 = 2\cdot2\cdot2\cdot5 = 2^3\cdot5^1 \qquad 125 = 5\cdot5\cdot5 = 5^3\cdot2^0$$
$$2 = 2^1\cdot5^0 \text{ e } \qquad 5 = 5^1\cdot2^0$$

Io posso quindi affermare in generale che una divisione si può eseguire esattamente quando, fatte tutte le semplificazioni possibili tra dividendo e divisore, questo ultimo risulti composto unicamente di potenze del 5 e del 2 (computando anche la potenza con esponente zero, che vale 1).

Non entriamo in maggiori particolari in proposito e concludiamo:

Ricordando quello che abbiamo detto a proposito dei numeri « irrazionali » e chiamando « razionali » tutti gli

altri, possiamo dire di essere sicuri che in ogni frazione e quindi in ogni divisione di numeri razionali, avremo per risultato un numero razionale $\frac{p}{q} = r$ se con r rappresentiamo questo numero razionale, e ciò qualunque possano essere p e q: interi, fratti, positivi o negativi, solo che non sieno numeri irrazionali, la cui divisione non è possibile: essa non può eseguirsi che con operazioni a potenze fratte o con somme indefinite di termini di determinate serie decrescenti di potenze ad esponenti negativi o con altre serie di frazioni decrescenti.

Siamo ormai arrivati a un buon punto della nostra ascensione: dominiamo il panorama dei numeri in genere, cogniti e costanti o incogniti. Abbiamo imparato a conoscere l'algoritmo delle equazioni ad una sola incognita e quello a due incognite delle diofantiche. Siamo ora preparati a rivolgerci verso più alti problemi della matematica e ad intraprendere lo studio delle « funzioni ».

Tutto quello che ora seguirà è più facile di quanto abbiamo finora studiato. Di qui innanzi parleremo di molte cose, ne spiegheremo molte altre, discuteremo molto: ma non calcoleremo più faticosamente e non sofisticheremo più. Respireremo l'aria pura dell'alta matematica (volevo dire dell'alta montagna).

Riposiamoci un poco e poi, coraggio e avanti.

Capitolo XVII

FUNZIONI (derivazione algebrica)

Se noi avessimo un'equazione diofantica semplice, per es.:

$$3x - y = -5$$

e se la risolvessimo secondo il metodo di Eulero per ottenere dei valori interi delle incognite, avremmo:

$$x = \frac{y-5}{3} \quad \text{e} \quad \frac{y-5}{3} = n \quad \text{cioè} \quad x = n$$

Inoltre per la y si avrebbe la soluzione $y = 3n + 5$.

Ora poniamo al posto di n i numeri interi consecutivi 1, 2, 3... fino ad un numero qualunque:

$n = 1,\ x = 1,\ y = 8$	Prova:	$3 - 8 = -5$
$n = 2,\ x = 2,\ y = 11$	»	$6 - 11 = -5$
$n = 3,\ x = 3,\ y = 14$	»	$9 - 14 = -5$
$n = 4,\ x = 4,\ y = 17$	»	$12 - 17 = -5$
$n = 5,\ x = 5,\ y = 20$	»	$15 - 20 = -5$

e così via, indefinitamente.

Abbiamo dunque trovato, mediante il metodo di Eulero un numero infinito di soluzioni intere e positive. Avremmo potuto egualmente trovare un numero infinito di soluzioni intere negative. Difatti:

$n=-1,\ x=-1,\ y=2;$	Prova:	$-3-(+2)=-5$
$n=-2,\ x=-2,\ y=-1;$	»	$-6-(-1)=-5$
$n=-3,\ x=-3,\ y=-4;$	»	$-9-(-4)=-5$

e così via. Come si vede, a partire da $n = -2$ tutti i valori delle incognite x e y, diventano negativi, poichè

$x = n$ e perciò x deve essere negativo se si prende n negativo. Ma anche y deve sempre rimanere negativo quando l'intero n è più piccolo di (-1), poichè la costante positiva che l'accompagna nella espressione $y = 3n + 5$ è il 5 e già per $3 \cdot (-2)$ passa dalla parte dei numeri negativi: tanto più per $n = -3$ perchè

$$y = (-9) + 5 = -4.$$

Abbiamo già una doppia infinità di valori possibili per x e per y: una infinità di soluzioni intere positive ed una infinità di soluzioni intere negative. In questa doppia infinità di valori appare come caso speciale, come *curiosità* il paio di valori che assumono x ed y per $n = -1$ per i quali si ha $x = -1$ e $y = +2$: di più per $n = 0$, per cui anche $x = 0$ si ha $y = 5$. Si hanno quindi $(2 \times \infty) + 2$ soluzione intere.

E ora, trasformiamo alquanto la nostra equazione diofantica senza alterarla. Scriviamola, invece che $3x - y = 5$, sotto la forma

$$y = 3x + 5$$

ciò che avremmo dovuto fare fin dal principio, per darle la forma che si deve. Ora supponiamo che c'interessi di conoscere non solo i valori interi di x e di y, ma anche quelli frazionari e stabiliamo che prima cercheremo la x, che metteremo nell'equazione per ricavarne poi la y. Nel nostro caso la cosa è anche più semplice perchè y ha il coefficiente 1 e così evitiamo ogni divisione. Assumiamo dunque per x alcuni valori fratti; per es.:

$$x = \frac{1}{2},\ y = 3.\frac{1}{2} + 5 = \frac{3 + 10}{2} = \frac{13}{2}$$

$$x = \frac{1}{3},\ y = 3.\frac{1}{3} + 5 = \frac{3 + 15}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$$x = \frac{2}{7},\ y = 3.\frac{2}{7} + 5 = \frac{6 + 35}{7} = \frac{41}{7}$$

e così via. Naturalmente si possono dare per y anche dei valori interi come nel secondo caso di $x = \frac{1}{3}$, tuttavia i casi in cui ciò non accade sono enormemente più frequenti.

Per la nostra, ormai non più diofantica, equazione (per la quale x ed y non hanno più valori interi) e che è ancora indefinita e con due incognite, troveremo anche qui infinite soluzioni sotto forma fratta.

Il valore di questa infinità, dipende dal fatto che già solo tra i due valori 0 ed 1 si possono avere infiniti valori fratti e così tra 1 e 2, tra 2 e 3 ecc. A ciò aggiungi tutte le possibilità nelle quali x viene assunto come frazione negativa, come per es. $x = -\frac{10}{1}$ e così via.

Se ci guardiamo bene, qui ci troviamo davanti alle seguenti infinità di soluzioni: tutte le frazioni positive per x danno sempre frazioni positive per y. Se si pone $x = 0$ (che io potrei chiamare la frazione con 0 al numeratore e un qualsiasi numero al denominatore) allora $y = 5$. Se prendo per x delle frazioni negative, esse danno tutte per y, infinite frazioni positive per tutti i valori di x compresi fra $-\frac{1}{\infty}$ e $x = -\frac{5}{3}$. Per quest'ultimo valore di x si ha $y = 0$. Per tutti i valori delle frazioni che sono più piccoli di $-\frac{5}{3}$ (per es. per $-\frac{6}{3}$) anche y avrà valori negativi.

Ad ogni modo abbiamo già, per la nostra equazione indeterminata, una doppia infinità di valori interi delle variabili ed una infinità multipla di valori fratti. E in più, il caso speciale $x = -\frac{5}{3}$.

Allora potremmo in grazia del nostro concetto di numero come l'abbiamo fin qui esteso, pensare d'inserire tra due frazioni qualunque uno o tutta la infinità di numeri irrazionali (per es. un $\sqrt[4]{25}$ o simile).

Si capisce che con ciò anche y diventa irrazionale (1). Se noi avessimo rappresentato il numero irrazionale x con una frazione decimale, aggiungendo a questo una costante, avremmo ricavato dalla somma ancora un numero irrazionale.

Ci troviamo quindi ora dinanzi alla più insolita quantità di infinite paia di soluzioni per x ed y, una quantità diciamo così, di infinità elevata a potenza e noi constatiamo con un quasi mistico terrore che la nostra inoffensiva equazione

$$y = 3x + 5$$

nasconde nel suo seno una infinità complessa di infinite soluzioni, tanto dal lato positivo che dal lato negativo. Frammezzo a queste si presentano alcuni notevoli casi particolari e di più una infinità elevata a potenza di paia di valori per i quali x ed y hanno segno diverso.

Riassumendo: noi possiamo dare ad x un qualsivoglia valore intero, frazionario od irrazionale e ricavarne il relativo y. Chiameremo due valori corrispondenti di x ed y: *paia di valori*.

Per poter vedere dinanzi a noi in modo concreto, plastico, questo nostro meraviglioso algoritmo, della cui insolita prolificità non abbiamo che una pallida idea, le cui conseguenze non possiamo ancora apprezzare, noi ci costruiremo una semplice macchinetta che poi faremo « funzionare ». L'apparecchio apparirà come qui appresso descritto (vedi figura 11): immaginate una specie di bilancia da lettere con una leva rettilinea imperniata nel suo mezzo su un sopporto e portante alle estremità un indice che si sposti lungo una scala graduata semi-

---

(1) a rigore matematico un numero che consta di una parte razionale e di una irrazionale come per es.:

$$y = 3.\sqrt[4]{25} + 5$$

si dice un « surdum » che è traduzione latina del greco « alogos » di cui parlammo precedentemente.

circolare. La leva è costituita da guide che portano due scale su entrambi i lembi. Su ciascuna di queste scale si può spostare un cursore pesante, ricambiabile. Dalle semplici leggi della leva di Archimede, l'azione di uno di questi cursori dipende non solo dal peso suo, ma dalla sua posizione lungo la leva, cioè dal « braccio di leva ».

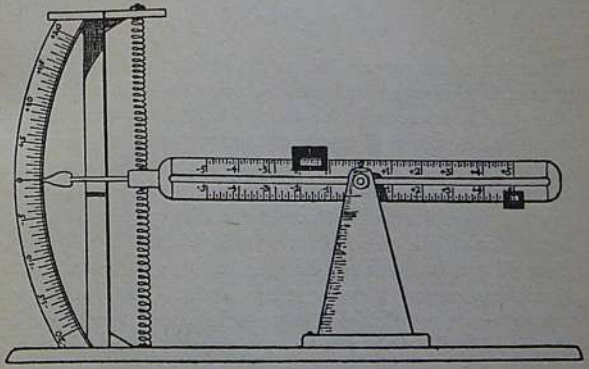


Fig. 11

Un ettogramma posto a distanza 5 avrà un'azione 5 volte più grande che se fosse posto a distanza 1 sulla leva stessa. L'indice ci dà ogni volta, sulla scala, per così dire lo « stato di carico » della nostra bilancia variabile. Se questa si trova in equilibrio sotto l'azione dei pesi cursori, l'indice segnerà zero sulla scala. L'indice è inoltre trattenuto da leggiere molle a spirale che lo attirano verso l'alto e verso il basso e che sono così costruite da reagire ad una qualsiasi trazione, ma non ad una compressione (teoricamente anzi la reazione di compressione deve essere nulla). La parte inferiore della leva serve per mettere a posto le « costanti », quella superiore per

mettere a posto le « x ». Supporremo che in ogni caso l'unità sia rappresentata dall'ettogrammo. E ora facciamo funzionare la nostra macchina e spieghiamoci, come se dovessimo scriverne le istruzioni per l'uso. Scegliendo i cursori di peso appropriato che avremo a nostra disposizione, cerchiamo di fabbricare la nostra equazione:

$$y = 3x + 5$$

Prendiamo un cursore di un ettogramma e spostiamolo in corrispondenza del segno 5, segnato sulla scala inferiore della leva, sulla quale sta scritta la parola « costante ». E poichè si tratta di una costante, bloccheremo questo cursore e non ci penseremo più, finchè non cambieremo di equazione. Nell'insieme del sistema della nostra macchinetta l'ettogramma che abbiamo fissato eserciterà sulla leva uno sforzo verso il basso 5 volte maggiore di quello che avrebbe esercitato se fosse stato collocato sul segno 1 della stessa scala. Contemporaneamente vedremo l'indice segnare in corrispondenza del numero 5 sulla scala graduata circolare, poichè le molle sono state calcolate in modo che così debba essere.

E ora mettiamo a posto la x: poichè questa compare con il coefficiente 3 devo scegliere un cursore di 3 ettogrammi poichè abbiamo detto che per noi un ettogrammo rappresenta il numero concreto 1. In che punto della leva collocheremo questo cursore? Pensiamoci un momento e vedremo che esso va collocato dove va messa la x e questo lo potremmo sapere quando avremo portato l'indice (che ci dà la posizione della y) sullo zero, cioè dopo aver messa la leva in equilibrio. Se invece di fare un calcolo, io faccio scorrere il cursore lungo la leva cercando di stabilirne l'equilibrio, io osservo subito che ottengo questo risultato quando il mio cursore da 3 ettogrammi si trova in corrispondenza del segno $(-\frac{5}{3})$

ossia a $\left(-1+\frac{2}{3}\right)$ sulla graduazione superiore della leva, la quale porta a sinistra i numeri negativi. Notiamo subito che, facendo il prodotto di 3 per $-\frac{5}{3}$ abbiamo lo stesso risultato che moltiplicando 1 per (— 5): ora è noto che per mettere in equilibrio una leva basta che il prodotto dei pesi per il braccio di leva rispettivo sia uguale per entrambi gli estremi della leva stessa.

Noi tocchiamo così con mano che, per soddisfare alla equazione $y = 3x + 5$ dobbiamo prendere una x uguale a $\left(-5\frac{5}{3}\right)$ perchè y sia uguale a zero.

Noi possiamo però procedere in modo più elegante, se pensiamo che la nostra equazione $y = 3x + 5$ può mettersi anche sotto la forma:

$$y = 3x^1 + 5x^0.$$

Ricordiamo che ogni potenza zero di un numero è uguale ad 1. Quindi nulla è mutato nel valore delle nostre equazioni. Noi potremmo così considerare la graduazione superiore della leva come quella delle x^1, e la graduazione inferiore come quella delle x^0. Al posto di un ettogramma fissato sul segno $x = 5$ potremmo scegliere un cursore da 5 ettogrammi e fissarlo sulla graduazione inferiore 1 a destra (graduazioni positive) e avremmo il secondo termine del secondo membro dell'equazione. Ma questo sia detto di passata: ci torneremo sopra più tardi.

Accontentiamoci del primo modo di fissare la costante (sulla divisione 5) e, ripetiamolo, non preoccupiamoci più di essa; consideriamola cioè come facente parte degli organi mobili della nostra macchinetta: come un contrappeso.

Invece siamo curiosi di fare delle prove sulla mac-

china col secondo cursore, quello di 3 ettogrammi. La graduazione superiore avendo un « campo » esteso fra i limiti -5 e $+5$ come si vede in figura, spostiamo il cursore, cioè variamo il carico lungo la leva. Portiamolo per es. a destra sulla graduazione $\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5} = x$. La leva si abbassa subito verso destra e l'indice, sollecitato anche dalle molle, dopo qualche oscillazione si fermerà sul valore $9\frac{1}{5}$ della scala curva; questo vuol dire che per il valore di $x = \frac{7}{5}$, $y = \frac{1}{5}$ e difatti

$$3 \cdot \frac{7}{5} + 5 = \frac{21 + 25}{5} = \frac{46}{5} = 9\frac{1}{5}$$ (vedi fig. 12)

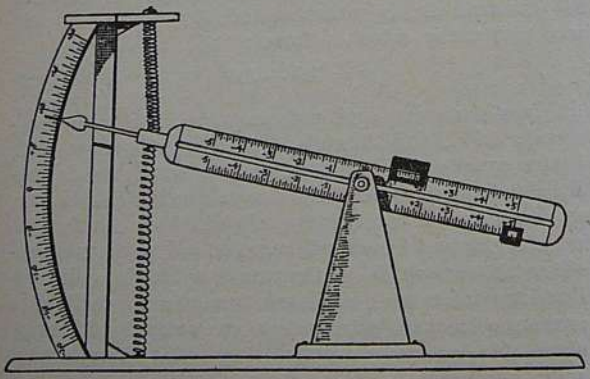


Fig. 12

Facendo cioè variare comunque la x, la y varia conseguentemente in modo automatico e meccanico.

Abbiamo verificato ora che la nostra macchinetta a leva funziona in modo preciso. Da questo suo funzionare ricaveremo il concetto matematico di « funzione »

che abbiamo illustrato con questo esempio meccanico. Non sarà che un ripiego mnemonico, ma tant'è, il paragone calza.

E incominciamo a stabilire, ancora in modo non molto preciso, che si ha una «funzione» sempre quando in una equazione od espressione matematica contenente due incognite o «variabili» una di esse si ricava necessariamente fissando un valore qualsiasi per l'altra.

Quest'ultima (nel caso nostro la x), si chiama la «variabile indipendente» perchè può assumere qualunque valore, mentre l'altra, la y è dipendente da x, cioè è funzione obbligata, particolare, di quel valore che abbiamo dato ad x. La funzione è costituita dalla legge di questa dipendenza ed è rappresentata dalla particolare espressione matematica sulla quale operiamo.

Quando noi lasciamo cadere una pietra, la velocità che assume il grave cadente, varia col tempo secondo una legge che è quella della caduta dei gravi e che si esprime matematicamente con la nota formola:

$$\text{velocità} = g \times \text{tempo}$$

dove g è una costante.

Rappresentiamo la velocità con y e scriviamo

$$y = 9.81 \times t$$

assumendo t come variabile indipendente.

Con questa scrittura avremo espresso la velocità di caduta dei gravi «in funzione del tempo». Infatti se al posto del t generico scriviamo per es. 3 secondi, siccome la costante 9.81 è l'accelerazione della gravità espressa in metri al secondo, avremo nel prodotto $9.81 \times 3 = 29.43$, la velocità y alla fine del 3° secondo, espressa in metri al secondo.

E qui possiamo ricordare che, seguendo un simbolismo introdotto da Leibnitz, si suole dai matematici indicare una funzione con una f od una φ (greca), seguita da un

x o un t fra parentesi, secondochè la variabile indipendente è una x qualunque oppure è la variabile tempo.

$$y_1 = f(x) \qquad o \qquad y_2 = \varphi(t)$$

f o φ possono esprimere una legge qualunque.

Avendo così appresa la nomenclatura e scrittura relativa alle funzioni, torniamo alla nostra macchinetta che ora potremo chiamare una macchina per calcolare funzioni lineari, cioè funzioni nelle quali la y è proporzionale in qualche modo alla variabile indipendente. Se al tempo di Galileo Galilei fossero state di moda le macchine a calcolare (che furono inventate poco tempo appresso da Biagio Pascal) il nostro grande meccanico si sarebbe forse servito di una macchinetta come la nostra per calcolare la velocità di caduta dei gravi.

Spostiamo ora con precauzione il cursore sulla graduazione superiore della nostra macchinetta; vediamo che l'indice si sposta sulla scala curva e se facciamo variare in modo continuo la posizione del cursore sulla leva, l'indice si sposterà pure in modo continuo e ciò entro i limiti imposti dalla scala: a qualunque posizione data sulla scala al cursore (cioè per qualunque valore intero, fratto o irrazionale della variabile x) l'indice segna un corrispondente valore per la y sulla scala curva e questo potrà essere intero, fratto o irrazionale, sempre in perfetta corrispondenza col valore della x.

Questo nostro piccolo esperimento ci rende tangibile la nozione di «continuità» di una funzione. Accontentiamoci per ora di un semplice cenno intuitivo: vedremo più avanti questa continuità della funzione quando ne esamineremo l'interpretazione geometrica.

E ora applichiamo quello che abbiamo finora appreso sulle funzioni ad un problema ben definito, il cui senso e il cui scopo ci appare, a prima vista, ancora nascosto.

Poichè si tratta di un semplicissimo problema di algebra, non vediamo la ragione di passarlo inosservato, tanto più che servirà ad introdurre nuovi concetti.

Chiediamoci dunque che cosa succede coll'indice delle y quando in una data posizione della leva noi facciamo crescere la x di una quantità determinata. È probabile che l'indice si sposti pure esso di un'altra quantità determinata ad essa corrispondente.

Abbiamo già visto che nella visione euclidea il rapporto è indipendente dalle grandezze impiegate per stabilirlo e la nostra macchinetta, come abbiamo pure visto or ora, stabilisce un certo rapporto fra l'aumento (i matematici dicono «incremento») dato alla x e quello che di necessità subirà conseguentemente la y.

Abbiamo pure detto che le scale che sono segnate sulla leva e quella che è segnata sull'arco lungo il quale si sposta l'indice, si corrispondono. Ma possiamo anche nascondere le scale: il fatto della corrispondenza rimane.

Così se una x qualunque, diciamo semplicemente «la variabile x», cresce di una piccola quantità che scriverò Δx (1), ne seguirà necessariamente un aumento corrispondente Δy secondo la legge della funzione, che nella nostra macchinetta è rappresentata dalle relazioni geometriche delle sue parti fisse e mobili.

Ora noi ci chiediamo: dal punto di vista puramente algebrico, quale Δy risulta dalla variazione Δx della variabile indipendente?

Se noi vogliamo trovare questo accrescimento $y + \Delta y$ della funzione y, scriveremo: per es. nel caso della equazione dianzi trattata:

$$(y + \Delta y) = 3\,(x + \Delta x) + 5$$

poichè dopo l'incremento Δx dato alla x questa è evidentemente diventata $(x + \Delta x)$. Noi non sappiamo affatto il valore della x; non sappiamo neppure quanto grande sia l'incremento Δx. Noi poniamo solo una con-

(1) Questo triangolo è la maiuscola della lettera greca Delta e viene usata dai matematici, assieme al δ minuscolo per indicare una variazione piccolissima ma finita della variabile a cui viene premessa.

dizione: che esso sia finito, misurabile (per es. sulla graduazione della leva). Esso potrebbe avere una grandezza qualunque, ma lo prenderemo molto piccolo.

Che cosa cerchiamo? Il rapporto fra Δy e Δx, vale a dire $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Togliamo le parentesi all'ultima equazione; avremo:

$$y + \Delta y = 3x + 3\Delta x + 5.$$

E ora serviamoci di un artifizio che è stato suggerito da Leibnitz, sebbene lo abbia scritto in modo diverso. Ricordando che $y = 3x + 5$ e che siamo autorizzati a sottrarre da entrambi i membri della equazione questi due valori che sono eguali fra di loro, senza che perciò il valore dell'equazione cambi, scriviamo:

$$\begin{array}{rrr} y + \Delta y = & 3x + 3\Delta x + 5 \\ -y \quad = & -3x \quad\quad -5 \\ \hline \Delta y = & 3\Delta x \end{array}$$

Una cosa analoga avevamo fatto con le mele ed i pesini sulla bilancia per determinare il peso di una mela, cioè la x.

Se dunque $\Delta y = 3\Delta x$ sarà $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$ o, mettendo sotto forma di eguaglianza di rapporti $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1}$ o come proporzione $\Delta y : \Delta x = 3 : 1$.

Il nostro problema è risolto: abbiamo trovato il rapporto di proporzionalità fra Δy e Δx nel caso della legge lineare espressa da $y = 3x + 5$.

Dal principio della indipendenza del rapporto dalla grandezza dei termini che entrano a formarlo, possiamo pensare Δy e Δx piccoli quanto vogliamo, fin presso all'estremo limite dello zero (1).

(1) Secondo un concetto più moderno è più esatto di diminuire il Δx di tanto da ridurlo alla differenza fra il valore della x e quello dell'ultimo numero irrazionale che lo precede nella scala dei numeri.

Questo valore estremamente piccolo – infinitamente piccolo – di Δx indichiamolo con dx, e con dy il valore corrispondente di Δy, e scriviamo:

$$\frac{dy}{dx} = 3 \text{ oppure } \frac{dy}{dx} = \frac{3}{1}.$$

E ora, togliamo il velo! Senza sforzo alcuno noi abbiamo calcolato il temuto « coefficiente differenziale », la « *derivata* » di una funzione, e precisamente della funzione $y = 3x + 5$.

Data una funzione qualunque $y = f(x)$ la sua derivata si esprime anche con y', oppure con $\dot{y}$, l'indice o il punto volendo indicare la derivata prima della funzione y.

Nel caso esaminato, la derivata di $y = 3x + 5$ è risultata una costante $y' = 3$. Ciò vuol dire che per qualunque valore della x, la derivata è sempre la stessa.

La costante 5 dell'equazione non ha nessuna influenza sul valore della derivata: se infatti la trascurassimo e cercassimo la derivata di:

$$y = 3x$$

avremmo:

$$\begin{array}{rl} y + \Delta y = & 3(x + \Delta x) \\ y + \Delta y = & 3x + 3\Delta x \\ -y \quad = & -3x \\ \hline \Delta y = & 3\Delta x \end{array}$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$ e $\frac{dy}{dx} = 3$. Il perchè di questo lo comprenderemo meglio più avanti. Lo possiamo però già vedere intuitivamente sulla nostra macchinetta: nella quale l'equilibrio è rotto unicamente per lo spostamento del peso delle x. Anche qui la derivata della funzione $y = f(x)$ cioè y' è una costante.

Ora procediamo col nostro nuovo algoritmo del calcolo differenziale che avevamo provvisoriamente con-

siderato come una cabala formale, e applichiamolo ad una funzione nuova per noi in cui x figura al quadrato e che perciò si chiama « funzione quadratica ». Per es. a questa qui:

$$y = 2x^2 + 7.$$

Dobbiamo lasciar da parte la nostra macchinetta delle funzioni lineari e affidarci al procedimento formale. Scriveremo dunque:

$$\begin{array}{rcl} y + \Delta y = & & 2(x + \Delta x)^2 + 7 \\ & = & 2(x + \Delta x)\,(x + \Delta x) + 7 \\ & = & 2[x^2 + x\Delta x + x\Delta x + (\Delta x)^2] + 7 \\ & = & 2(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 7 \\ y + \Delta y = & & 2x^2 + 4x\Delta x + 2\,(\Delta x)^2 + 7 \\ -y & = & -2x^2 \qquad\qquad\quad -7 \\ \hline \Delta y = & & 4x\Delta x + 2\,(\Delta x)^2 \end{array}$$

Con un siffatto risultato, non possiamo ora con il metodo noto, rappresentare in modo soddisfacente il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Ma pensiamoci un po' e calcoliamo (1). Noi vogliamo arrivare non al quoziente delle differenze finite, ma a quello dei valori infinitamente piccoli di esse cioè alla derivata $\frac{dy}{dx}$. Qui dx è già un numero infinitamente piccolo. Posso per es. rappresentarmelo con una frazione piccolissima $\frac{1}{q}$ dove q è un numero enormemente grande. Allora $(\Delta x)^2$ cioè $\left(\frac{1}{q}\right)^2$ cioè $\frac{1}{q^2}$ è uu numero in cui q^2 ha un valore così straordinariamente enorme che $\frac{1}{q^2}$ diventa affatto trascurabile anche di fronte a $\frac{1}{q}$. Si tratta qui di un « infinitesimo di ordine superiore » di

(1) Di qui il nome di calcolo differenziale.

cui parleremo più innanzi e che potremo fin d'ora non considerare affatto. Allora scriveremo l'ultima espressione semplicemente $dy = 4xdx$, ottenendo per la derivata il valore $\frac{dy}{dx} = 4x$.

Otteniamo cioè per la funzione quadratica una funzione $y' = 4x$ che contiene ancora x ma alla prima potenza.

Noi potremmo ora, con un procedimento puramente formale, ricavare tutto l'algoritmo del calcolo differenziale in modo rigoroso.

Siccome però il principiante potrà meglio afferrare tutti i problemi di questo metodo di calcolo quando potrà farsene una rappresentazione grafica, e dato anche che lo sviluppo storico di questo « Calcolo » ha seguito la via geometrica, noi lasceremo per il momento questo argomento finchè saremo in grado di trattarlo anche con la geometria, che ci sarà indispensabile per approfondire la nostra comprensione delle nuove operazioni di Calcolo e dell'Analisi infinitesimale.

Capitolo XVIII

IL TEOREMA DI PITAGORA

Riportiamoci col pensiero alla più antica civiltà degli egizi e degli indiani. Ancora attualmente i nostri costruttori si meravigliano della inverosimile precisione con la quale gli egizi eseguivano le misure di lunghezze e di angoli per i loro manufatti. È questo, merito dei cosiddetti « arpedonatti » o tenditori di corde (i geometri agrimensori di quel tempo) i quali dalle loro conoscenze geometriche trassero i mezzi per tracciare angoli e in modo particolare angoli retti e quindi le perpendicolari ad una data linea.

Supponiamo questi geometri egizi intenti a tracciare sul terreno, con picchetti, le basi di un grandioso tempio rettangolare. È evidente che anche piccolissimi scarti di allineamento o di misura negli angoli possono portare ad errori notevoli nella costruzione: chiunque abbia osservato dei muratori o dei carpentieri al lavoro avrà visto quanto spesso hanno ricorso al livello, al filo a piombo e alla squadra per verificare l'esattezza delle dimensioni orizzontali e verticali del manufatto.

Fig. 13

Per tornare agli Arpedonatti egizi: essi costituivano una corporazione religiosa dei «tenditori di corde» e compivano le loro misure sul terreno con rito solenne per meglio impressionare il buon pubblico d'allora. Essi si servivano di una lunghissima corda con nodi regolari e divisa da cappi a, b, c, d – che la dividevano nel rapporto di $5 : 3 : 4$ come mostra la figura 13.

Quando essi volevano costruire un angolo retto piantavano nel terreno un picchetto in corrispondenza del cappio c poi un secondo nel cappio b sull'allineamento sul quale volevano calare la perpendicolare; poi, due uomini che tenevano i due capi liberi della corda ben tesa, camminavano l'uno verso l'altro fino a far coincidere il cappio in a con quello in d e allora due altri inservienti cacciavano un picchetto nei due cappî riuniti. Così costruivano un triangolo, rettangolo in R nel vertice c, i cui lati stavano nel rapporto di $3 : 4 : 5$. Ogni ragazzo un po' sveglio avrà già capito il giuochetto che veniva fatto con tanta solennità, ma non anticipiamo. Chiamiamo «ipotenusa» (dal greco ipo e teino = tendo sotto) il lato più lungo del triangolo, quello teso sotto all'angolo retto R.

Gli altri due lati sono i « cateti » del triangolo (dal greco catà = giù e temi = mando) cioè sono quelli che mandati giù o abbassati l'uno sull'altro, danno l'angolo retto in R.

Ma perchè precisamente quella proporzione speciale fra le lunghezze dei lati? Anche qui il nostro ragazzino sveglio ci suggerirà: Teorema di Pitagora ! Il che equivale a dire la proprietà più importante del triangolo rettangolo è che se facciamo il quadrato dei numeri che misurano i cateti: nel nostro caso 3 e 4 e li sommiamo fra di loro, otteniamo il quadrato del numero che misura l'ipotenusa, nel nostro caso 5. Così:

$$\begin{array}{lll} (1° \text{ cateto})^2 + (2° \text{ cateto})^2 & = & (\text{ipotenusa})^2 \\ 3^2 + 4^2 & = & 5^2 \\ 9 + 16 & = & 25 \end{array}$$

Il nostro ragazzino sveglio ci dice sorridendo che abbiamo superato il ponte degli asini, il « pons asinorum »

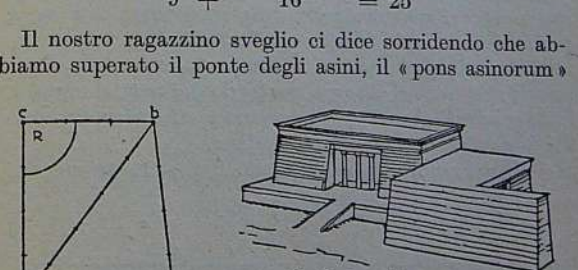


Fig. 14

dei pedagoghi antichi: la prova del fuoco delle nostre capacità geometriche.

E ora capirete perchè quei geometri-preti dell'antico

Egitto, circondavano la loro operazione geometrica di un rito. Il buon popolo credulo doveva rimanere al di là del ponte della sapienza. Il nostro vecchio Pitagora che ha invece popolarizzata questa verità, che probabilmente aveva appresa in Egitto, ce l'ha tramandata come teorema che porta ancora il suo nome.

Se noi esprimiamo in generale i cateti con a e b e l'ipotenusa con c, scriveremo questo teorema geometrico con una equazione algebrica:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

e ricorderemo che l'angolo opposto a c è retto.

Non mancano le dimostrazioni di questo teorema. Ne daremo una che non è molto elegante ma, per contro, assai significativa. Nel primo grande quadrato è iscritto quello che si può costruire sulla ipotenusa, cioè su c; e si può dire: c^2 = grande quadrato tratteggiato meno i quattro triangolini (a b c). Nel secondo caso, nello stesso grande quadrato si disegni, partendo dai vertici opposti, i due quadrati a^2 e b^2 che si possono costruire su ciascuno dei due cateti a e b; e si potrà dire:

$a^2 + b^2$ = grande quadrato meno i quattro triangolini (a b c).

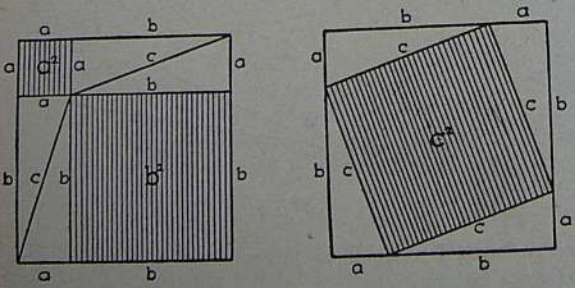


Fig. 15

Ora due grandezze eguali ad una terza sono uguali fra di loro e allora $a^2 + b^2 = c^2$; come si voleva dimostrare.

Dimostrata questa proprietà per il triangolo generico di lati *a b c* essa resta dimostrata per qualunque triangolo rettangolo. Essa è una proprietà generale del triangolo rettangolo.

E ora, consideriamo anzitutto la nostra nuova formola come una semplice equazione algebrica e prepariamoci le seguenti soluzioni provvisorie:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$b^2 = c^2 - a^2$$

tutte « quadratiche » cioè con i termini elevati al quadrato. Ma può interessarci di avere il valore dei singoli lati *a b* e *c*; allora basta estrarre la radice dai due membri nelle equazioni qui sopra; avremo:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}; \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad (1).$$

Ora noi sappiamo anche che molte radici danno come risultato dei numeri irrazionali: supponiamo per es. che entrambi i cateti abbiano uguale lunghezza; cioè che sia $b = a$ allora:

$$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \text{ e } c = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2 \cdot a} = 1{,}41 \ldots a.$$

Ora $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale perchè il 2 non è il quadrato di nessun numero e quindi anche $\sqrt{2a}$ sarà un irrazionale. Di passata si può osservare che due triangoli rettangoli a cateti uguali, accoppiati per l'ipotenusa formano un quadrato a^2, nel quale *c* figura come diagonale. Da quanto si è ora detto risulta che la diagonale

(1) Per gli scopi presenti, consideriamo solo il valore positivo di queste radici: il valore negativo lo vedremo quando parleremo degli immaginari.

Biblioteca Civica

di un quadrato sta ai lati in un rapporto non commensurabile, espresso quindi da un numero irrazionale.

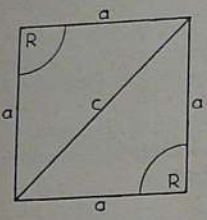


Fig. 16

Se per contro scegliessimo per c un numero intero risulterebbe allora un numero irrazionale per a; poichè

$$2a^2 = c^2 \quad a^2 = \frac{c^2}{2} \quad a = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

L'irrazionalità, cioè, in senso geometrico non è una proprietà di una data grandezza, ma del suo rapporto ad un altra, quando questo si esprime con un numero irrazionale (1). Così se tracciamo un cerchio ed un suo diametro, il primo resta incommensurabile col secondo; difatti il rapporto

$$\frac{\text{circonferenza}}{\text{diametro}} = 3.1415\ldots \text{ cioè } = \pi.$$

Anche qui non è nè la circonferenza, nè il diametro di per sè che sono irrazionali, ma il loro rapporto.

Pitagora nella sua mistica dei numeri, considera questa incommensurabilità, questa relazione che non si può esprimere con nessun rapporto esatto, come il simbolo della vita, sempre diversa, sempre varia.

Non è il nostro intento di approfondire il simbolismo della nuova cabala geometrica; porremo invece una domanda squisitamente cabalistica:

Vogliamo trovare una regola, con la quale costruire tutti i possibili triangoli rettangoli con lati espressi da numeri interi ?

Prendiamo per ciò ad imprestito, senza dilungarci nel derivare le formole relative, una tabella del formulario

(1) L'irrazionalità è cioè relativa.

del prof. O. Th. Bürklen (dalla Sammlung Göschen tedesca) nella quale troviamo la risposta. Se u e v sono due numeri interi positivi qualunque, e se $u < v$, si ottengono dei triangoli rettangoli i cui lati a b e c sono espressi da numeri interi se si fa:

$$c = u^2 + v^2 \quad a = u^2 - v^2 \quad \text{e} \quad b = 2uv$$

u	v	$u^2 + v^2 = c$	$u^2 + v^2 = a$	$2uv = b$
2	1	5	3	4
3	1	10	8	6
3	2	13	5	12
4	1	17	15	8
4	2	20	12	16
4	3	25	7	24
5	1	26	24	10
5	2	29	21	20

e così via.

Oltracciò è ancora permesso di moltiplicare per un numero intero positivo qualunque m, i lati del triangolo dei geometri egiziani, con la qual cosa si ottiene una nuova infinità di triangoli rettangoli a lati interi e razionali. Per es.:

$$\begin{aligned} (3\cdot5)^2 &= (3\cdot4)^2 + (3\cdot3)^2 \\ 15^2 &= 12^2 + 9^2 \\ 225 &= 144 + 81 = 225 \end{aligned}$$

La stessa cosa si può ottenere dividendo per un numero intero qualunque m, come:

$$\left(\frac{1}{4}.5\right)^2 = \left(\frac{1}{4}.4\right)^2 + \left(\frac{1}{4}.3\right)^2$$

$$\frac{25}{16} = \frac{16}{16} + \frac{9}{16}.$$

Si può anche dividere per una frazione $\frac{7}{3}$, come in:

$$\left(\frac{3}{7}.5\right)^2 = \left(\frac{3}{7}.4\right)^2 + \left(\frac{3}{7}.3\right)^2$$

$$\left(\frac{15}{7}\right)^2 = \left(\frac{12}{7}\right)^2 + \left(\frac{9}{7}\right)^2$$

$$\frac{225}{49} = \frac{144}{49} + \frac{81}{49} \qquad (1)$$

Capitolo XIX

FUNZIONI ANGOLARI

Non ci indugiamo: un nuovo grande compito esige ora tutta la nostra attenzione.

Avevamo già intuito, nel derivare il teorema di Pitagora, una certa relazione necessaria fra gli angoli ed i lati di un triangolo rettangolo.

Ora la scienza speciale che studia queste relazioni si chiama, come tutti sanno, la Trigonometria (dal greco « misura dei tre angoli ») e queste relazioni, come già l'avevamo sospettato dalla parola « necessaria » sono funzioni che chiameremo angolari o goniometriche.

Naturalmente non c'indugeremo troppo a lungo su questo ramo particolare delle Matematiche: ci accontenteremo di esaminarne le nozioni ed i teoremi fondamentali, poichè essi dovranno ritrovarsi nel calcolo differenziale.

---

(1) In generale è ammissibile qualunque forma come $(mc)^2 = (ma)^2 + (mb)^2$ dove m è un numero razionale (intero o fratto) ed a, b e c uno degli infiniti numeri della tabella oppure un multiplo razionale di questi.

Segniamo anzitutto un cerchio qualunque, che divideremo mediante due diametri od « assi » ad angolo retto, in quattro « Quadranti » (fig. 17).

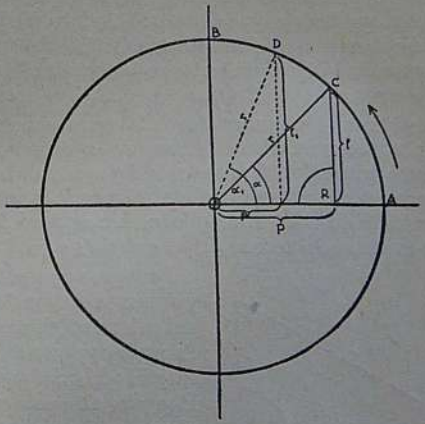


Fig. 17

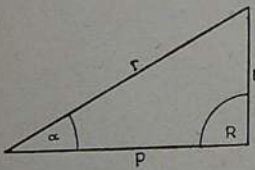
Se ora immaginiamo che un raggio r si muova, come una sfera d'orologio, dalla sua posizione di riposo sulla OA e ruoti nel senso della freccia fino a portarsi nella posizione OB sull'altro asse, noi veniamo a creare tra OA e il raggio mobile tutti i successivi angoli da 0 a 90°.

Supporremo noto che il cerchio si divide solitamente in 360° e che ogni quadrante sottende un angolo di $\frac{360^0}{4} = 90°$, perchè ognuno di questi gradi sul cerchio sottende un angolo al centro di 1°. Se il raggio $r = oc$ determina un arco AC di 45° l'angolo α al centro sarà pure di 45°.

Possiamo quindi dire che l'angolo variabile α può assumere, nel primo quadrante, tutti i valori da 0° a 90°.

Se ora da un punto, come c, della circonferenza, caliamo una perpendicolare l sulla retta OA di partenza, veniamo a formare un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa è rappresentata dal raggio oc = r ed i cui cateti sono l e p, quest'ultimo tagliato su OA dal « piede » della perpendicolare testè calata su di OA. Questo triangolo, pur mantenendosi sempre retto, scompare nelle due posizioni estreme di r su OA e su OB.

La quistione fondamentale della trigonometria consiste nella determinazione dell'angolo α dati i lati dell'anzidetto triangolo. Che una relazione esista tra queste grandezze è evidente: poichè nel triangolo punteggiato con vertice in D e il cui angolo α_1 è maggiore di 45° io ho, per la stessa ipotenusa, altri cateti l_1 e p_1.



F 18

La cosa apparentemente più semplice consisterebbe nel misurare gli angoli dall'angolo opposto ad uno dei cateti l ed l_1: dal teorema di Pitagora abbiamo però già visto che le cose non sono tanto semplici quanto sembrano a primo aspetto. Dobbiamo perciò ricorrere ad una via alquanto più complicata ed esprimere l'angolo per mezzo di un rapporto di lati. Da provetti matematici noi sappiamo, dalle regole delle combinazioni di poter formare 6 diverse combinazioni con i 3 lati di un triangolo: qui i tre lati sono i tre elementi ed i rapporti sono degli ambi di una variazione senza ripetizione (cfr. a pag. 40) La formola corre così:

$$\binom{3}{2} \cdot 2! = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \times 1 \cdot 2 = 6$$

I rapporti sarebbero:

$$\frac{r}{l};\ \frac{r}{p};\ \frac{l}{p};\ \frac{l}{r};\ \frac{p}{r}\ \text{e}\ \frac{p}{l}$$

e questi sono effettivamente altrettante « funzioni angolari ».

Disegniamo nuovamente il nostro triangolo rettangolo in fig. 18 e diamo un nome a queste sei funzioni; chiameremo:

$\frac{l}{r}$ il *seno* dell'angolo $\alpha = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}}$

$\frac{p}{r}$ il *coseno* » » $= \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}}$

$\frac{l}{p}$ la *tangente* » » $= \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}}$

$\frac{p}{l}$ la *cotangente* » » $= \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{cateto opposto}}$

$\frac{r}{p}$ la *secante* » » $= \frac{\text{ipotenusa}}{\text{cateto adiacente}}$

$\frac{r}{l}$ la *cosecante* » » $= \frac{\text{ipotenusa}}{\text{cateto opposto}}$

In via normale non si usano che le quattro prime funzioni, così non c'è da spaventarsi. Anzi per tranquillizzarti, lettore mio, ti dirò che, essenzialmente, basterà ai nostri fini la sola funzione « tangente ». Tuttavia sarà bene, per principio, di esaminare anche il modo di comportarsi della prima funzione, del *seno*, entro il primo quadrante.

E qui serviamoci di un artifizio: poichè il seno di α è il rapporto fra il cateto l opposto ad α ed il raggio r prendiamo $r = 1$ e allora il seno $\frac{l}{r}$ sarà espresso dal solo numeratore l e così avremo raggiunto il nostro scopo, di esprimere cioè una funzione angolare con una semplice misura lineare, cioè con un numero. La semplifica-

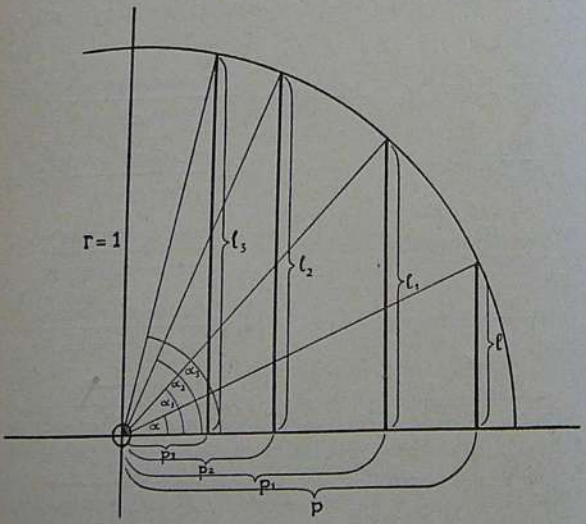


Fig. 19

zione da noi apportata consiste praticamente nel misurare la perpendicolare l col raggio preso come unità di misura. Nel disegno (fig. 19) l, l_1, l_2, l_3... rappresentano le grandezze rispettive del seno degli angoli α, α_1, α_2, α_3... Io posso per es. affermare senz'altro che il seno

di 0° è zero, mentre che il seno di 90° è 1 (cioè è uguale al raggio che abbiamo preso come unità). Il seno dunque, nel primo quadrante cresce continuamente da 0 ad 1 col crescere degli angoli da 0° a 90° e può assumere qualunque valore, anche irrazionale, compreso fra detti limiti. Per es. sen 45° lo conosciamo già, è un irrazionale perchè è il rapporto fra i lati di un quadrato e la sua diagonale e vale 0,70711 (1). Aggiungiamo che generalmente non si danno le lunghezze reali di l, ma i logaritmi di queste lunghezze. Nelle tavole logaritmiche si trovano i logaritmi delle funzioni angolari calcolati al minuto secondo, cioè al 3600mo di grado.

Esaminiamo ora la funzione tangente, che è particolarmente importante per noi, come si è detto sopra. Il nome viene dal concetto di tangente al cerchio e converrà fabbricarci un attrezzo goniometrico che ci dia meccanicamente la relazione fra l'angolo α e la sua tangente. La tang α è $= \frac{l}{p}$.

Adottiamo anche qui l'artifizio di fare il denominatore $= 1$ cioè di misurare l con p come unità di misura (che è poi ancora il raggio r). In questo caso il raggio r costituisce il cateto invariabile mentre la tangente è il rapporto ad esso dell'altro cateto, che varia di lunghezza in modo particolare: per $\alpha = 0°$ anche tangente $\alpha = 0$, poi col crescere di α, la tangente cresce dapprima lentamente assumendo da 0° a 45°, valori compresi fra zero ed 1, poi, oltre i 45°, cresce sempre più rapidamente assumendo dei valori che vanno fino all'infinito (per $\alpha = 90°$). Col nostro attrezzo potremo misurare sulla tangente al cerchio, supposto $r = 1$, i seguenti valori: tang $45° = 1$; tang $60° = 1{,}73205$; tang $70° = 2{,}7475$; tang $85° = 11{,}43$; tang $89° = 57{,}29$; tang $89^{5}/_{6} = 343{,}7737$ infine per 90° il nostro regolo goniometrico

(1) Veramente avevamo trovato prima il valore reciproco 1.4142.

diventa parallelo alla tangente; il cui valore diventa infinito.

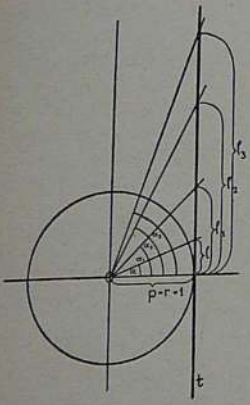


Fig. 20

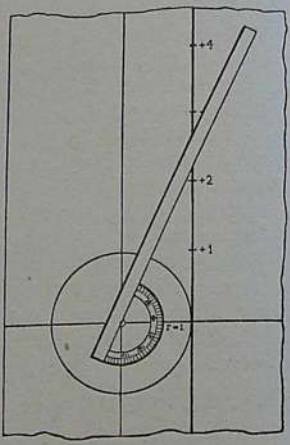


Fig. 21

Mi si può chiedere a che serve la trigonometria. Affermerò senz'altro che la tangente ci è indispensabile in alta matematica: ma questo non sarebbe sufficiente per creare e far studiare una disciplina così complicata.

La trigonometria riesce utile, anzi indispensabile anche nella pratica, dovunque si debbano calcolare angoli o triangoli, specialmente quando da una combinazione di angoli e di triangoli, come si usa in agrimensura, si debbano calcolare i rimanenti angoli o lati. Le distanze inaccessibili vengono poi calcolate trigonometricamente e tutta la Geodesia si fonda sulla misura di angoli e la risoluzione di triangoli. Si può così misurare dalla pianura l'altezza di un monte non mai scalato come l'Everest, partendo da una «*base*» accuratamente misurata

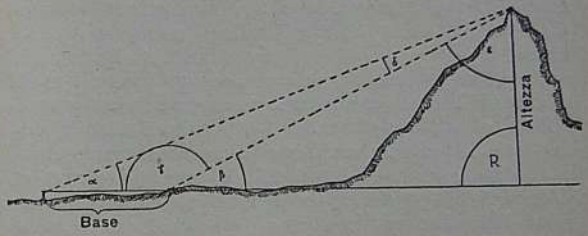


Fig. 22

in un punto accessibile, dalle estremità della quale si punta con un teodolite verso la vetta del monte, misurando gli angoli α β e γ, dai quali si ricava l'angolo δ al vertice e l'angolo ε che la seconda visuale fa con la verticale per il vertice della montagna.

L'artiglieria aggiusta i suoi tiri mediante calcoli trigonometrici e determina l'altezza dei velivoli anche durante il loro volo.

E questo ci basti per quanto riguarda le funzioni angolari.

Capitolo XX

NUMERI IMMAGINARI

Seguendo il nostro metodo, divenuto ormai abitudinario, c'inoltreremo ora in questo terreno difficile con le considerazioni più semplici. Ci ricorderemo che la estrazione di radice ci ha recato la prima massima sorpresa riguardo alla teoria dei numeri, fornendoci i numeri irrazionali, ed ora è di nuovo nel campo del calcolo delle radici che incappiamo nei numeri immaginari! Che ci sieno numeri reali, fratti o interi, nulla di più naturale,

che esistano dei numeri irrazionali lo possiamo ammettere: ma dei numeri immaginari, che cosa possono ben essere? O è forse un nome dato così dai matematici, per una ragione che ancora ci sfugge, ad una data categoria di numeri? Vediamo: e anzitutto risaliamo alla loro genesi.

Se ci ricordiamo del nostro calcolo per simboli e a quel caso oltremodo semplice di esso che abbiamo chiamato « l'associazione dei comandi dei segni più e meno », ci tornerà alla mente anche il fatto notevole che, eseguita l'associazione, non si poteva dire, per quanta buona volontà ci si mettesse, come l'associazione stessa si fosse formata.

Nessuno per es. può dire se un $+1$ risulti dalla moltiplicazione di $(+1)\cdot(+1)$ oppure dalla moltiplicazione di $(-1)\cdot(-1)$. Se scriviamo: $(+a^2)$ questo a^2 potrebbe risultare tanto da un $(+a)(+a)$ che da un $(-a)(-a)$. La cosa non ha nessun interesse per i numeri ordinari, cioè non ha importanza per le quattro operazioni fondamentali. Nella somma e nella sottrazione non m'importa di sapere come si sia formato il nostro $(+a^2)$: è semplicemente un $(+a^2)$ e come tale lo si tratta nei calcoli. Così pure nella moltiplicazione e nella divisione: perchè anche quando si dividesse per $(+a)$ oppure per $(-a)$ si otterrebbe un risultato esatto ed univoco, indipendente dal modo in cui si è formato il $(+a^2)$. Per abbondanza facciamo la supposizione che esso derivi da un $(-a)(-a)$: allora la sua divisione per $(+a)$ darà:

$$\frac{(-a)\cdot(-a)}{+a} = \frac{(-a)\cdot[(+a)\cdot(-1)]}{+a} =$$

$$= \frac{(-a)\cdot(+a)\cdot(-1)}{+a} = \frac{(-a)\cdot(-1)}{1} = +a.$$

Dividendo invece per $(-a)$, avremo invece:

$$\frac{(-a)\cdot(-a)}{-a} = -a.$$

Se invece derivasse da un $(+a)\cdot(+a)$, la divisione per $(+a)$ darebbe:

$$\frac{(+a)(+a)}{+a} = +a$$

e quella per $(-a)$:

$$\frac{(+a)\cdot(+a)}{-a} = \frac{(+a)[(-a)\cdot(-1)]}{-a} =$$

$$= \frac{(+a)\cdot(-a)\cdot(-1)}{-a} = (+a)\cdot(-1) = (-a).$$

E fin qui tutto procede liscio e « a regola d'arte ».

I guai incominciano con le estrazioni di radice, poichè, come abbiamo ripetuto fino alla noia, tanto $(+a)(+a)$ quanto $(-a)(-a)$ danno lo stesso $(+a^2)$ e nell'operazione « litica » di estrazione di radice si ottiene con $\sqrt{a^2}$ un doppio valore, di cui si sa in modo indubbio il valore assoluto $|a|$ ma solo si è incerti sul segno da attribuirgli e, per non sbagliare si è costretti a scrivere $\sqrt{a^2} = \pm a$.

Questa incertezza non si ha tuttavia con *tutte* le radici: $\sqrt[3]{-a^3}$ dà certamente $-a$, perchè $(-a)(-a)(-a)$ darebbe $(-a)^3$ e quindi $\sqrt[3]{(-a)^3} = -a$.

Con la radice quarta, eccoci di nuovo in dubbio sul segno da premettere alla radice. E già prevediamo la regola.

Secondo la regola dell'associazione dei comandi, un numero pari di segni dà un *più* nel risultato. E poichè le potenze contengono in sè tanti segni quant'è il numero espresso dall'esponente, le radici di numeri con

esponente pari avranno il doppio segno, quelle di numeri con esponente impari avranno un solo segno che è quello del radicando. Questo si esprime con una formola generale del tipo:

$$\sqrt[2n]{r} = (\pm s); \quad \sqrt[2n+1]{r} = (+ s); \quad \sqrt[2n+1]{(- r)} = (- s).$$

E fin qui abbiamo chiarito la cosa. Nessuno però c'impedisce di chiedere: che cosa succede per $\sqrt[2n]{(- r)}$, cioè per la radice pari di un radicando negativo?

Confessiamo che, per quel che abbiamo appreso fin qui, non siamo assolutamente in grado di rispondere a questa giustificatissima domanda.

Poichè, nel campo dei numeri da noi finora esplorato, non troviamo nessuna specie di numeri negativi che possano risultare da una elevazione a potenza pari. Ogni numero elevato alla $2n^{esima}$ potenza deve essere positivo; e quando un radicando non può essere considerato come la $2n^{esima}$ potenza di un numero di qualunque specie, non è possibile di estrarne la radice.

Ci troviamo dunque dinanzi ad un tipo indubbiamente nuovo di numero, assolutamente sconosciuto, il quale ha la singolare proprietà di dar luogo ad una $2n^{esima}$ potenza negativa. Ora, poichè – come lo vedremo – tutti questi numeri si riducono finalmente alla radice quadrata di $(- 1)$, lasciamo per un momento il caso generale e consideriamo la radice di $(- 1)$ cioè $\sqrt{- 1}$, che certamente è un caso particolare del nostro problema generale.

Introdurremo questa $\sqrt{- 1}$ come il nuovo numero i che è l'iniziale di «numero immaginario». La nostra $\sqrt{- 1}$ rende così segnalati servigi, perchè per es. $\sqrt{- 15} = \sqrt{(- 1) \cdot (+ 15)} = (\sqrt{- 1})(\sqrt{15}) = i\sqrt{15}$.

E a questo proposito mostriamo tutta la capziosità della matematica un po' profonda con un problema pro-

posto dal matematico Dedekind, famoso per la sua teoria dei numeri: Noi sappiamo che $\sqrt{1}$ può essere tanto $(+1)$ che (-1). Chiamiamo r la radice di uno e non ci preoccupiamo più del risultato nel quale si nascondono entrambi i valori $(+1)$ e (-1) che possiamo scegliere a piacimento, senza commettere errore.

Ora $r+1=2$ se noi assumiamo la radice positiva di r, mentre $r-1=(-2)$ se assumiamo la radice negativa di r. Se moltiplichiamo in linea affatto generale questi due numeri

$$(r+1)\cdot(r-1) \text{ si ha } r^2+r-r-1 \text{ cioè } r^2-1$$

e poichè $r=\sqrt{1}$ sarà in ogni caso $r^2=1$ e quindi $r^2-1=1-1=0$. Se invece moltiplichiamo fra di loro le due soluzioni trovate $(+2)\cdot(-2)$ otteniamo (-4) per lo stesso prodotto $(r+1)(r-1)$. Cioè nel caso generale abbiamo come risultato zero e nel caso concreto abbiamo invece un numero diverso da zero (-4). Questo vorrebbe significare che si danno casi in cui la moltiplicazione di due numeri diversi da zero ha come risultato, una volta zero e un'altra volta un numero diverso da zero, a seconda del modo in cui la moltiplicazione stessa viene eseguita. Ora questo farebbe completamente rovinare il nostro algoritmo.

Con i nostri nuovi numeri immaginarii inciampiamo ancora in altre conclusioni incomprensibili. Supponiamo di avere da moltiplicare, per es.: $\sqrt{-9}\times\sqrt{-4}$.

Da quanto si è studiato fin qui, scriveremmo tranquillamente: $\sqrt{(-9)(-4)}$ allo stesso modo in cui potremmo scrivere $\sqrt{16}\times\sqrt{4}=\sqrt{16\cdot4}=\sqrt{64}=-8$.

Dall'anzidetto radicale ricaveremmo analogamente: $\sqrt{+36}=\pm6$. Ma io dichiaro che questo calcolo è falso: poichè $\sqrt{-9}=i\sqrt{9}$ e parimenti $\sqrt{-4}=i\sqrt{4}$ e quindi $\sqrt{-9}\,.\,\sqrt{-4}=i^2\sqrt{9.4}=(-1)\sqrt{36}=\mp6$. Nella solu-

zione precedente l'errore stava nel doppio segno $\pm$ che va capovolto.

Se io avessi indicato con m la $\sqrt{36}$, avrebbe fatto una enorme differenza il prendere $(+ m)$ invece di $(- m)$ come risultato della moltiplicazione. Ora l'inversione del doppio segno nell'ultimo risultato non è altro che un'associazione di comandi fra (-1) e $\sqrt{36}$, perchè dobbiamo considerare anche i come un « operatore », un comando.

Ma si danno ancora altri casi singolari con gli immaginarii: il grande fisico e matematico Huygens di Züllichem fu con ragione meravigliato quando Leibnitz gli propose di calcolare l'espressione:

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$$

dicendogli che il risultato era il numero 2,449897 cioè la radice di 6. Com'è possibile, dovette esclamare Huygens, che dalla somma di due radici che comprendono somma e differenza dell'unità con radici immaginarie, possa risultare un numero positivo, per quanto irrazionale? E noi aggiungiamo ancora: attraverso a quali orridi abissi ed a quali passaggi esposti, deve averci condotti l'inerrabile nostro algoritmo per portarci da cose inconcepibili, al di là di ogni umana possibilità di rappresentazione, ad un risultato finale che si può comprendere?

Oh! che tutto questo non sia altro che un giuoco puramente formale?

Ebbene cerchiamo di indagare in qual modo si arrivi a questo risultato. Leibnitz afferma che:

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{3}}=\sqrt{6}.$$

Incominciamo a sbarazzarci dei radicali, elevando al quadrato entrambi i membri:

$$(\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}})(\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}})=\sqrt{6}.\sqrt{6}$$

cioè:

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}.\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}.\sqrt{1+\sqrt{-3}}+$$
$$+\sqrt{1+\sqrt{-3}}.\sqrt{1-\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}.\sqrt{1-\sqrt{-3}}=6$$
$$(\sqrt{1+\sqrt{-3}})^2+2\sqrt{(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})}+(\sqrt{1-\sqrt{-3}})^2=6$$
$$1+\sqrt{-3}+2\sqrt{1-\sqrt{-3}+\sqrt{-3}-\sqrt{(-3)^2}}+1-\sqrt{-3}=6$$
$$1+\sqrt{-3}+2\sqrt{1-(-3)}+1-\sqrt{-3}=6$$
$$1+\sqrt{-3}+2\sqrt{4}+1-\sqrt{-3}=6$$
$$1+4+1 \qquad =6 \text{ ossia } 6=6.$$

Così abbiamo verificato, brillantemente, l'affermazione di Leibnitz. Ma per non fare più di queste sfacchinate di calcolo, diamo qui tre regole pratiche che ci faciliteranno i computi in avvenire:

$$(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

che ogni allievo delle secondarie deve sapere a memoria.

Avevamo detto sopra che l'unità immaginaria $\sqrt{-1}$ si rappresenta con la lettera i. Questa lettera, quando s'appiccica ad un'altra, la trasforma in immaginaria e dovunque appare un immaginario bisogna stare attenti, a rischio di cadere in errori, come abbiamo mostrato qui sopra con un esempio.

Quando un immaginario, *ib* per es., forma binomio con un numero reale come in $(a+ib)$ oppure $(a-ib)$ noi abbiamo nella quantità tra parentesi un «numero complesso». Il perchè di questo nome è intuitivo.

Il calcolo con i numeri complessi ha una importanza notevole in Elettrotecnica ed in Radiotecnica; quindi non sarà male spendere qualche parola di spiegazione.

Anzitutto due complessi si dicono «coniugati» quando come $(a+ib)$ e $(a-ib)$ non differiscono che per il segno

dell'immaginario. Applicando la prima regola pratica data qui sopra, si vede che

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - i^2b^2$$
$$= a^2 + b^2.$$

poichè: $i^2 = -1$

Il prodotto di due complessi è un numero che non contiene più immaginari. Così pure accade per il quadrato della somma di due complessi coniugati:

$$[(a+bi)+(a-bi)]^2=(a+bi)^2+2(a^2-b^2i^2)+(a-bi)^2$$
$$= a^2+2abi+b^2i^2+2a^2-2b^2i^2+a^2-2abi+b^2i^2 =$$
$$= 4a^2+2b^2i^2-2b^2i^2 = 4a^2.$$

Se indichiamo con r^2 la somma $a^2 + b^2$, chiameremo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ *modulo* del numero complesso dove a e b sono due numeri reali qualunque.

Un numero reale si può considerare come un numero complesso in cui la parte immaginaria sia nulla. Così:

$$m = m + i0.$$

Il numero immaginario, per contro, è un numero complesso la cui parte reale è nulla:

$$in = 0 + in.$$

Un numero complesso si può anche esprimere come potenza complessa di e: così i due complessi coniugati $(a + ib)$ e $(a - ib)$ si possono anche esprimere con

$$re^{i\theta} \quad re^{-i\theta}$$

dove $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e Θ è un angolo la cui tangente è $\frac{b}{a}$ (che impareremo a conoscere più avanti).

Eulero ha trovato che fra i due irrazionali π ed e esiste, attraverso agli immaginarii, una strana relazione $e^{i\pi} = -1$ sulla quale ritorneremo.

Ora che abbiamo fatto la conoscenza con tutti i tipi di numeri, prima di arrischiarci a rendere « visibili » gli immaginarii, stabiliamo una classificazione dei numeri in:

1. *Numeri reali:*

$$\text{A) Numeri razionali} \begin{cases} \text{interi: } 2,\ 4,\ 99\ldots \\ \text{fratti: } \frac{5}{7},\ 0{,}25,\ 1\cdot\frac{3}{4}\ldots \end{cases}$$

$$\text{B) Numeri irrazionali} \begin{cases} \sqrt[4]{25},\ \pi=3{,}1415,\ e=2.718\ldots \\ \text{surdi } (5+\sqrt[4]{25})\ldots \end{cases}$$

2. *Numeri immaginari:*

a) il numero $i=\sqrt{-1}$

b) i numeri complessi $(a+bi)$

c) i numeri complessi coniugati $(a+bi)$, $(a-bi)$.

Un'altra classificazione potrebbe distinguere:

a) Numeri concreti, come: $7, \sqrt[4]{25}, 5+2\sqrt{13}$ ecc.

b) Numeri generici, come: a, c $\sqrt[n]{p}$, $\frac{r}{s}$ ecc.

c) Numeri incogniti, come: x, y, z ecc.

d) Numeri variabili, come: $y=f(x)$, $z=5y+3x$, ecc.

e finalmente potremmo distinguere tra:

A) Numeri positivi o negativi (cioè affetti da un segno + o —) come: -2, $+a$, $-\sqrt{p}$ ecc.

B) Numeri assoluti, come: $|a|$, $\left|\frac{13}{16}\right|$, $|d-ni|$, $|fy|$ ecc.

E con ciò siamo giunti alla vetta della nostra montagna dei numeri che si protende, oltre le nuvole degli immaginarii.

Questa arrampicata « accademica » ci rende atti a penetrare in qualunque campo della matematica.

Rifacciamoci ora a quella tale linea di numeri sulla quale abbiamo rappresentati i numeri positivi e negativi e vediamo come possiamo servircene per rappresentare quei numeri immaginari, veri spettri numerici, di cui abbiamo appena incominciato a parlare.

Tracciata la nostra linea di numeri, tentiamo qualche artifizio di trasformazione. Per poter calcolare in modo generale, consideriamo un qualsiasi tratto del ramo positivo della linea dei numeri e chiamiamolo a (nel nostro caso a ci rappresenta il numero 5 o il segmento $5 - 0$ ancora eguale a 5). Naturalmente potremmo dare ad a qualunque altro valore finito assoluto. Facciamo ora fare

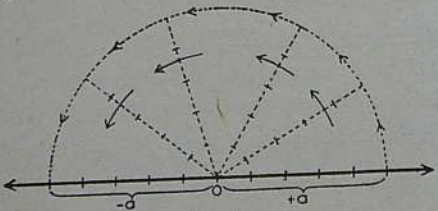


Fig 23

al nostro segmento a una « conversione a sinistra » nel piano del disegno attorno al punto zero, fino a che esso venga a coincidere col segmento $(-a)$ sul ramo negativo, che ha eguale valore assoluto $|a|$. Con questa conversione o mezza rotazione, abbiamo trasformato il $(+a)$ in $(-a)$. Con questa operazione abbiamo stabilito due cose: 1° che la direzione verso sinistra dal punto zero è quella in cui si collocano e crescono i numeri negativi come $(-a)$. 2° Che abbiamo adottato come senso positivo delle rotazioni nel piano del disegno quello contrario al moto delle sfere sul quadrante di un orologio. Anzi, poichè parliamo di « quadranti » la nostra conversione è stata di 180° cioè di due quadranti (di 90° cadauno) (quadrante qui ha il preciso significato di quarto di giro).

Se ora vogliamo dare a questa nostra conversione un significato aritmetico il quale ci permetta di mantenere intatto il nostro algoritmo generale, potremmo dire che essa ci rappresenta una moltiplicazione e precisamente la moltiplicazione di a per (-1).

Sembra un circolo vizioso, ma abbiate pazienza, rivelerà tosto la sua fecondità concettuale.

Poichè con la nostra conversione di 180° di a si è avuto $(-a)$ cioè $a \cdot (-1)$, possiamo considerare il (-1) come un fattore che ha fatto ruotare a di 180°, cioè che ha capovolto a rispetto all'origine dei numeri, portandolo dalla parte della scala negativa. Ora $-1 = i^2$ che è propriamente un «fattore di rotazione», come vedremo più avanti.

E ora vogliamo ritrovare da noi stessi in questa nostra ricerca un artifizio ingegnoso dovuto al matematico Federico Gauss. Chiediamoci cioè che cosa succede quando nella nostra conversione ci fermiamo a metà strada, cioè sulla perpendicolare per o alla linea dei numeri.

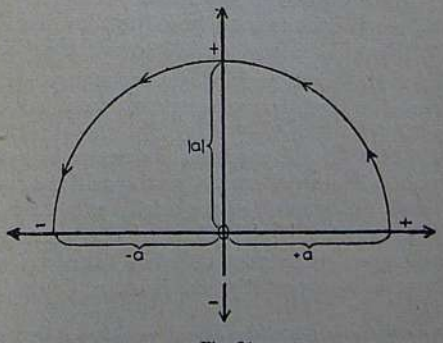


Fig. 24

Che cosa diventa il nostro a? Il suo valore assoluto $|a|$ non varia durante la rotazione, ma il segno? Se guar-

diamo la figura 24, siamo in dubbio se attribuirgli il segno + di destra o il segno — di sinistra della scala dei numeri. Così, a buon senso, ci sembra che non possiamo decidere nè per il + nè per il — e vorremmo scrivere $\pm$. Ma abbiamo un mezzo per uscire dall'incertezza. Cerchiamo il valore del « fattore di rotazione » per 90°.

Cercare questa incognita vuol dire stabilire un'equazione di cui conosciamo solo la costante a. Ma esiste un precedente: se chiamiamo x il fattore di rotazione per 90°, sappiamo che moltiplicando ax (valore che a avrebbe dopo 90° di conversione) ancora una volta per x dovremmo trovare il valore $-a$, cioè il valore che a assume dopo $2 \times 90°$ cioè per una rotazione di 180°. Scriveremo dunque l'equazione così:

$$\begin{aligned} (ax) \cdot x &= a(-1) && \text{che dà subito:} \\ x^2 &= -1 && \text{e} \\ x &= \pm\sqrt{-1} && \text{cioè } i. \end{aligned}$$

Ecco confermata la nostra intuizione del doppio segno $\pm$ di a nella posizione ad angolo retto da quella di partenza ed ecco anche trovato in i il fattore di rotazione per 90°. (Ricordiamo che per 180° cioè $2 \times 90°$ esso era i^2 cioè $i \times i$). Quindi moltiplicare un segmento $a = \overline{05}$ per i vuol dire fargli fare una conversione in senso positivo di 90° (1).

Ma c'è di più, noi possiamo assumere la perpendicolare per 0 all'asse dei numeri reali, positivi e negativi, come « asse dei numeri immaginarii » e portare su di essa i valori assoluti $|1|, |2|, |3| \ldots |a|$ che avranno tutti il doppio segno $\pm$ se portati verso l'alto e il doppio segno inverso $\mp$ se portati verso il basso. Come si vede,

(1) Se continuiamo a moltiplicare ai per i, facciamo fare un'altra conversazione di 90° al nostro segmento a e lo portiamo sull'asse dei numeri reali dalla parte negativa ($ai \times i = ai^2 = -a$). Moltiplicando $-a$ per i, faremo rotare il segmento di altri 90° e $-ai$ sarà sulla verticale all'asse dei numeri immaginari ma in basso. Moltiplicando ancora $(-ai)$ per i e avremo $-ai^2$ cioè $(-a)\,(-1)$ cioè a: siamo tornati alla posizione di partenza.

lo spettro dei nostri numeri immaginari incomincia a prender concretezza.

Incominciamo a capacitarci che tutti i numeri: quelli reali e quelli immaginarii possono esser rappresentati lungo due assi perpendicolari fra di loro e passanti per lo zero. Essi giacciono in un piano, naturalmente, e l'asse degli immaginari rappresenta una « seconda dimensione » dei numeri.

Vediamo d'impossessarci di questo concetto con qualche esempio concreto.

L'asse orizzontale, cioè l'asse dei numeri reali positivi e negativi, lo chiameremo l'asse delle x (positive se contate dallo zero verso destra, negative se contate dallo zero verso sinistra.

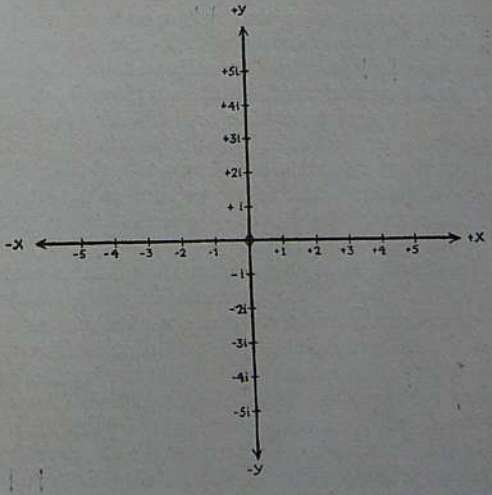


Fig. 25

L'asse degli immaginari lo chiameremo l'asse delle i (+ i se contate verso l'alto, — i se contate verso il basso). Lo potremo anche chiamare asse delle $y\,i$ (per non confonderlo con l'asse delle y funzioni di x). E allora, la superficie del piano compreso fra i quattro assi, cioè i quattro quadranti in cui questi assi dividono il piano che cosa rappresenterà?

Io dico che rappresenta tutti i numeri complessi cioè tutte le possibili combinazioni di numeri reali con numeri immaginari. Vedremo fra poco come questi si possano rappresentare graficamente in modo da diventare evidenti anche ai nostri occhi mortali e non solo agli occhi della nostra mente.

Ora pensiamo un po': il nostro i è un « operatore di rotazioni » una specie di comando « conversione a sinistr-sinistr ! »: l'ordine di moltiplicare per $\sqrt{-1}$. Ogni numero a ha un suo valore assoluto $|a|$, qualunque sia questo $|a|$, intero, fratto o irrazionale. Possiamo sempre trovare questo $|a|$ per così dire nella parte positiva destra dell'asse dei numeri reali. Su di essa giace la così detta « serie dei numeri naturali »: tra di essi sono inserite le frazioni e tra le frazioni gli irrazionali.

E ora viene all'ordine del giorno la quistione dei comandi, la quistione dei segni preposti ai numeri: algebricamente premettendo un + o un — ad un numero $|a|$ si ottengono due numeri (+ a) e (— a) diversi per segno ma non per valore assoluto. Ma possiamo associare i comandi e per es. dare il comando di + i e questo vuol dire: conversione a sinistra e verticalmente in alto sull'asse degli immaginari positivi, mentre il comando di — i vorrà dire: conversione a destra e verticalmente in basso sull'asse degli immaginari negativi. Il comando + i^2 vorrà dire: conversione a sinistra per 180° e orizzontalmente verso l'asse dei numeri reali negativi.

Il nostro primo problema è risolto. L'assoluto $|a|$ vale per tutti e quattro gli assi, allo stesso modo, e non viene

modificato che dal segno + o — e dal segno i. Su entrambi i rami dell'asse degli immaginari, incontreremo tutti e gli stessi numeri che incontriamo sui due rami dell'asse dei reali. Solo nel primo caso essi saranno sempre accompagnati dal segno i che li segue come un'ombra e di cui dobbiamo *sempre* tenere conto nei calcoli.

E ora chiediamoci ancora: come ci rappresenteremo combinazioni additive o sottrattive di numeri reali ed immaginari? In parole povere come ci rappresenteremo i numeri complessi della forma

$$a \pm i\,b$$

che abbiano detto potersi trovare lateralmente nel piano degli assi reali ed immaginari? È chiaro intanto che non possiamo accoppiare numeri reali ed immaginari su di un asse. I fattori di rotazione (+ 1) o (— 1) ruotano il numero $|a|$ sull'asse reale, quelli i, cioè $\pm\sqrt{-1}$, li ruotano invece sugli immaginari. Se volessimo rappresentare la forma più generale di numeri, i complessi, introducendo questi fattori di rotazione, dovremmo scrivere:

$$\{(\pm 1)\cdot|a| \pm (\pm i)\,|b|\}.$$

Tutta la differenza fra numeri reali ed immaginari risulta da questa formola, secondochè si considera $|b|$ od $|a|$ eguale o diverso da zero. Come già si è visto, se $|a| = o$, rimane $(\pm i)\,|b|$, cioè il numero immaginario $i\,b$; se $|b| = o$ rimane $(\pm 1)\,|a|$, cioè il numero reale a positivo o negativo. Se entrambi $|a|$ e $|b|$ sono zero rimane lo zero. Quindi il numero complesso non è che la sintesi di tutte le possibilità di un numero.

Per rappresentarci un complesso in modo grafico, dobbiamo chiederci che cosa ordini un comando come $a + b\,i$. Sappiamo intanto che a ossia (+ a) vuol dire spostarsi di a (in concreto per es. di 3) sull'asse dei numeri reali verso destra dall'origine 0; parimenti $b\,i$ vuol dire spostarsi di $b\,i$ (in concreto per es. di 4 i) verso

l'alto sull'asse degli immaginari. Questi spostamenti (da Galileo Galilei in qua) si possono combinare in uno spostamento unico risultante dai due. Allora, spostati che ci siamo da 0 in 3 per formare il numero reale a, spostiamoci ora parallelamente all'asse degli immaginari, di $4\,i$ fino in P, per formare $b\,i$. Il punto P ci rappresenterà l'immaginario $3 + 4\,i$ cioè $a + b\,i$ (fig. 26). Abbiamo così risolto il nostro problema: Il numero complesso giace nel piano degli assi, ma fuori di essi; nel caso concreto nel primo quadrante (che è quello in alto a destra degli assi). Se volessimo formare $3 - 4\,i$ cioè il coniugato $a - b\,i$ del numero precedente, vedremmo che esso si trova nel 4° quadrante in un punto simmetrico a P rispetto all'asse dei numeri reali.

Il segno premesso ad un numero reale ed il comando, i sono dunque chiari e precisi, basta eseguirlo con attenzione: la fig. 27 mostra come si rappresentano $(-5) + b\,i$ nel 2° quadrante; $(-\frac{7}{2}) - 5\,i$ nel 3° e l'irrazionale complesso $7 - \pi\,i$ nel 4° quadrante.

Per quanto interessante e feconda sia la ulteriore teoria dei numeri immaginari, sulla cui applicazione sistematica si fonda la teoria delle funzioni (teoria delle variabili complesse) ed in pratica tutto il calcolo delle grandezze elettriche che si maneggiano nella Radiotecnica, noi tradiremmo il nostro compito se ci soffermassimo più a lungo su questo argomento.

Ci limiteremo qui all'osservazione seguente: i numeri complessi vanno semplicemente considerati come espressioni a più termini (binomie) che adopereremo con franchezza ma con precauzione nelle quattro solite operazioni fondamentali di calcolo. Ad ogni modo nei calcoli concreti non dovremo mai scompagnare l'immaginario dal suo i (cioè da $\sqrt{-1}$) e rispetteremo l'accoppiamento dei comandi in tutte le sue conseguenze.

Sarà bene mettere ancora in chiara luce e svelare

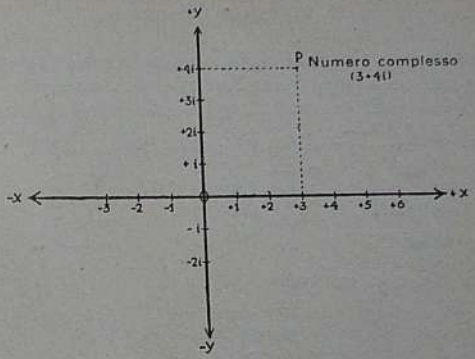

+y
P Numero complesso
(3+4i)
+4i
+3i
+2i
+i
-x
-3
-2
-1
+1
+2
+3
+4
+5
+6
+x
-i
-2i
-y

Fig. 26

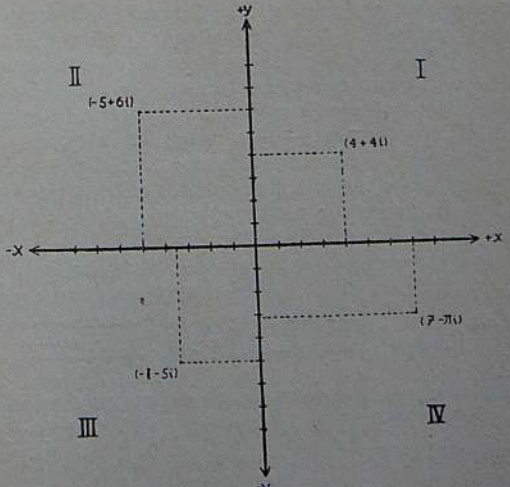

+y
II
I
(-5+6i)
(4+4i)
-x
+x
(7-7i)
(-1-5i)
III
IV
-y

Fig. 27

come l'operazione di elevazione a potenza dei numeri immaginari, ci conduca con l'operatore rotazione i ad un ciclo ben definito, che si svolge nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
i^2 &= (\sqrt{-1})^2 = (-1)^{2/2} = (-1)^1 &&= -1\\
i^3 &= i^2 \cdot i &&= (-1)\cdot i &&= -i\\
i^4 &= i^3 \cdot i &&= (-i)\cdot i = (-1)i^2 &&= +1\\
i^5 &= i^4 \cdot i &&= (+1)\cdot i &&= +i\\
i^6 &= i^5 \cdot i &&= (+i)\cdot i = i^2 &&= -1
\end{aligned}$$

e così via, e in generale:

$$\begin{aligned}
i^{4n} &= +1\\
i^{4n+1} &= +i\\
i^{4n+2} &= -1\\
i^{4n+3} &= -i\\
i^{4n+4} &= +1
\end{aligned}$$

e così via; dove n rappresenterebbe uno qualunque dei numeri naturali da 1 fino a qualunque valore finito.

Più difficile e misteriosa si presenta la estrazione di radice nei numeri immaginari e complessi. Poichè qui il nostro sforzo principale consiste sempre nel ridurre tutte le radici superiori di (-1) a radici quadrate di (-1) cioè a valori i, si sono derivate, con artifici più o meno ingegnosi, molte formole per facilitare queste operazioni. La loro derivazione ci condurrebbe tuttavia al di là dei limiti che ci siamo imposti (1).

Accontentiamoci di segnalare che la radice quadrata di un numero complesso $a + bi$ si calcola a questo modo:

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

(1) Un coefficiente numerico dinanzi all'i non complica affatto le cose se lo rendiamo esplicito mettendo in evidenza l'i: così l'immaginario $\sqrt{(-9)}$ non è che $\sqrt{9\cdot i} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}$ e quindi: $\sqrt[12]{-9} = \sqrt[12]{9}\cdot\sqrt[12]{-1} = \sqrt[12]{9}\cdot\sqrt[6]{i}$

e in generale $\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{a}\,.\,\sqrt[n]{2'}$.

formola che, naturalmente, può essere usata per l'estrazione della radice quadrata del solo i. Infatti i non è altro che un complesso $a + bi$ in cui $a = 0$ e $b = \pm 1$; secondo la nostra formola:

$$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

e

$$\sqrt{-i} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Che questa radice di i non sia più puramente immaginaria, ma risulti un numero complesso, si può comprendere se si pensa che essa non giace più sull'asse dei numeri ma nel piano accanto.

E ora, giunti in possesso del ben meritato universo dei numeri, serviamoci della nostra pratica nell'eseguire i comandi, per uno scopo particolare che gioverà a riunire in modo sorprendente quello che finora avevamo creduto facesse parte di domini affatto distinti. Passiamo cioè alla geometria analitica, la quale associa l'algebra alla geometria: lo sviluppo storico di questo ramo importantissimo delle matematiche risale ad Apollonio di Perga, geometra greco della scuola alessandrina, contemporaneo di Archimede ed i cui scritti vennero in parte tradotti da Giacomo Alfonso Borelli. A questo grande successore di Euclide si deve la introduzione di assi obliqui che dopo esser diventati « assi ortogonali » con Cartesio, vengono di nuovo adoperati come assi obliqui nella teoria della relatività dall'Einstein.

La geometria analitica quale ora l'adoperiamo è però gloria imperitura di Cartesio che, giovane ufficiale di cavalleria, ebbe la pazienza geniale di svilupparla nelle lunghe veglie dei campi invernali in Ungheria durante gli orrori della guerra dei trent'anni.

Capitolo XXI

COORDINATE

Come oramai abbiamo preso l'abitudine di fare, prima di entrare nell'argomento, noi ci costruiremo, anche solo col pensiero, un attrezzo che ci permetterà d'introdurre alcuni concetti di « cinematica », cioè della scienza del del movimento puro.

Questa è un ramo della fisica, ma è forse più affine alla geometria, tanto che alcuni la chiamano « geometria del movimento » anche quando si occupa di quelle entità fittizie che si chiamano « punti materiali » e che di materiale non hanno che il nome, per quella massa minuscola che si vuol attribuire ad un punto.

A noi però non interessa quello che si muove; ne faremo astrazione al punto da considerare, cosa impossibile praticamente, unicamente il movimento in sè, o come si è detto sopra, il movimento puro. Opereremo quindi su punti senza dimensioni, su linee e su superfici senza spessore, ossia su enti irreali ma che simboleggiano certi aspetti del mondo reale. Li rappresenteremo con punti o linee tracciate su di un foglio da disegno che hanno invero dimensioni, ma delle quali non ci occuperemo.

Il nostro attrezzo consisterà stavolta in una tavoletta da disegno sulla quale avremo steso un foglio di carta ed in una riga a T scorrevole sul lato sinistro della tavoletta. Questa riga ci permetterà di tracciare quante linee orizzontali parallele ci piacerà di disegnare.

Incominciamo a tracciare una linea di base in basso, poi a « mano libera » muoviamo la matita verso l'alto e verso destra con una certa velocità; traccieremo uno scarabocchio. Possiamo però aiutarci con la riga a T e mentre la spostiamo in alto, possiamo far scorrere la

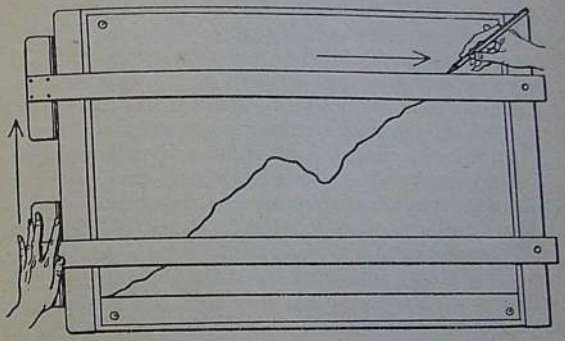


Fig. 28

matita lungo di essa verso destra. Dal moto combinato della riga e della mano risulterà un tracciato che sarà tanto più regolare quanto più uniforme sarà stato il doppio movimento. Se per es. questa uniformità di movimento, tanto della riga verso l'alto quanto della matita verso sinistra, fosse ottenuta a macchina, con la massima precisione, ne risulterebbe una retta PP_1 inclinata.

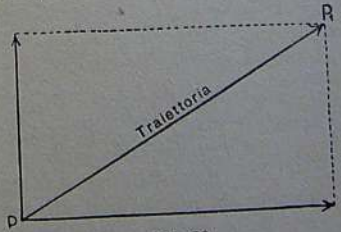


Fig. 29

Possiamo però eseguire a mano, per brevi tratti, una retta inclinata o considerare il nostro primitivo scarabocchio come costituito da una spezzata di tanti tratti

di varia inclinazione. Quel che c'importa di ritenere dal nostro primo esercizio di disegno con attrezzi, è la combinazione dei movimenti. La nostra retta inclinata PP_1 è la diagonale di un parallelogramma rettangolo dei movimenti. Anche in una linea sinuosa come la PP_1 delle figg. 30 e 31 possiamo seguire un punto P che si muova lungo di essa, come la combinazione di un doppio movimento simultaneo, in orizzontale e in senso verticale. Determineremo ad ogni istante lo spostamento orizzontale x e quello verticale y del punto stesso, individuando così il movimento e la sua traccia sul disegno cioè la sua « traiettoria », mediante due valori che si dicono le « *coordinate* » del punto, perchè coordinano la sua posizione rispetto a due direzioni arbitrarie o assi coordinati che qui sono rappresentate dagli spigoli della tavoletta.

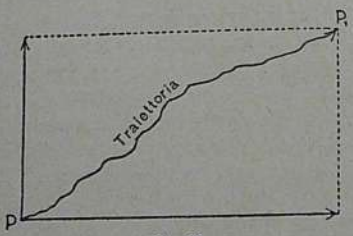


Fig. 30

Con ciò non siamo però avanzati di molto: anche se riuscissimo a tracciare una retta inclinata non abbiamo fatto che rappresentare una relazione lineare fra x ed y. Ma è già un principio di quel che cerchiamo: su questa retta, che è costituita da una infinità di punti consecutivi, perchè è una linea continua, ininterrotta, possiamo immaginare collocata tutta la serie di numeri reali, interi o fratti ed immaginari, a partire da un punto di origine e possiamo portarli sia in un senso che nel senso opposto dall'origine (numeri positivi e numeri negativi).

Ma noi cerchiamo una formola generale che leghi le coordinate y ed x. Ora sappiamo che una formola in cui compaiano le incognite x ed y non è altro che una equazione diofantica o non diofantica, ad ogni modo una « equazione indeterminata » fra le due incognite.

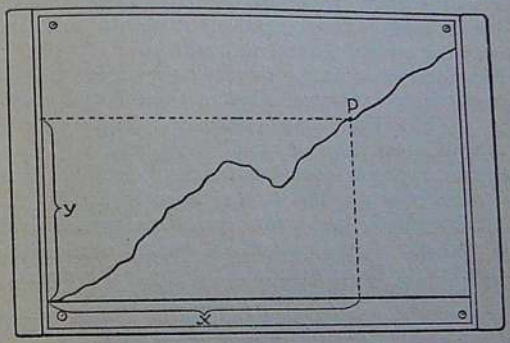


Fig. 31

Possiamo è vero scegliere la variabile indipendente x a nostro piacimento, ma allora perchè si possa determinare la y corrispondente, ci occorre conoscere la « legge del movimento » del punto nel piano del disegno, cioè la « funzione » secondo la quale y varierà con x. Questa funzione può essere rappresentata nel piano del disegno con una linea continua: ne abbiamo già incontrata una, la « funzione lineare » rappresentata dalla retta inclinata, ma si potrà avere una curva, una parabola, un cerchio, un'ellisse (tutte curve che hanno per espressione algebrica una funzione ben definita).

Di più, una curva irregolare potrà pensarsi costituita da tanti tratti di retta, di archi di cerchio, di parabola e quindi potrà venire espressa con una serie di equazioni algebriche fra la x e la y.

E se possiamo rappresentare ogni linea tracciata sul nostro foglio di carta con una funzione, sarà vero anche l'inverso, che cioè ogni funzione, algebrica o non, potrà essere rappresentata graficamente con le coordinate variabili di un punto mobile sul piano del disegno.

Questo a grandi tratti: ma possiamo anche analizzare il procedimento ed eccoci con ciò introdotti nell'Analisi geometrica o nella Geometria analitica.

Ricordiamoci anzitutto di una osservazione che avevamo fatta a suo tempo: che la funzione è il segno magico. Vale a dire? Dobbiamo esaminare più da vicino la natura della funzione prima di rispondere.

Avevamo spiegato come una funzione si scrive in modo affatto generale $y = f(x)$ (che si legge ipsilon funzione di x), intendendo per y una qualunque combinazione della variabile x con costanti. E questa combinazione può essere complicata quanto si voglia; così la funzione:

$$y = (2x + 5)\,\frac{\sqrt{5x^3 - 19}}{x^5 - x^3 + 2}\,25x^7$$

è certamente una funzione, per quanto complicata, di x, e così pure: $y = 5x + 13 \operatorname{sen} x$ è una funzione.

Il vocabolo funzione non ha dunque un significato unico: talvolta con esso s'intende l'intera equazione, nella quale si premette che x venga collocata in un modo qualunque. Altra volta s'intende la y stessa, come risultato, per così dire, dei calcoli eseguiti con la x e le costanti, cioè come espressione algebrica di x.

Noi potremmo anche scrivere:

$$\text{funzione di } x = f(x) = 5x + 13 \operatorname{sen} x$$

o più chiaramente:

$$\begin{array}{r} y = f(x) \\ y = 5x + 13 \operatorname{sen} x \\ \hline f(x) = 5x + 13 \operatorname{sen} x. \end{array}$$

A cui si arriva nel modo seguente:

$$\begin{array}{l} f(x) = y \\ f(x) = 5x + 13 \text{ sen } x \\ \hline y = 5x + 13 \text{ sen } x. \end{array}$$

Si pecca sovente nello sconvolgere i diversi significati che assume il vocabolo funzione; il quale in fondo non ne ha che uno solo, e così il principiante resta confuso. Perciò noi riprenderemo l'argomento dal bel principio.

Supponiamo di trovarci alle prese con la equazione:

$$15x^2 + 9x + 3y = 12x - 27$$

nella quale compaiono la x e la y; la prima incognita anche a potenze diverse. Se volessimo lavorare su questa funzione delle x, ci troveremmo nell'imbarazzo. Anche la nostra macchinetta a leva coll'indice non potrebbe servire. Perchè? Perchè la nostra funzione è « implicita » cioè involuta e noi dobbiamo prima renderla chiara, « esplicita ». Perchè l'indice della nostra macchinetta segna la y e non le 3y. Dobbiamo dunque prima isolare la y come avevamo fatto dianzi per la x nelle equazioni che non contenevano che questa incognita ed esprimere nel modo più semplice possibile la y in funzione della x e delle costanti.

Intanto, poichè ci è lecito di porre al posto della x un valore qualsiasi a nostro piacimento, scegliamone uno che metteremo al posto della x in tutti i termini in cui questa compare, trasformandoli in tante costanti: nella equazione rimarrà allora una sola incognita: la y. Risolveremo allora la equazione, rispetto alla y, allo stesso modo in cui risolveremmo un'equazione in x come:

$$2x + 5a = 24 + 17b$$

e ciò in numeri interi concreti, se per a e b ci è lecito di porre due numeri a piacimento; per es. $a = 2$ e $b = 4$. Si avrebbe:

$$2x + (5 \cdot 2) = 24 + (17 \cdot 4)$$

oppure:
$$2x = 24 + (17 \cdot 4) - (5 \cdot 2)$$
$$2x = 82$$
$$x = 41.$$

Si può attribuire carattere di funzione ad una equazione soltanto allora, quando si possa mettere al posto dell'incognita o variabile x, non solo un certo dato numero concreto, ma sempre un qualunque numero.

Allora, per risolvere anzitutto rispetto ad y la nostra prima equazione:

$$15x^2 + 9x + 3y = 12x - 27$$

dovremo prima renderla «esplicita», così:

$$3y = 12x - 9x - 15x^2 - 27$$
$$= 3x - 15x^2 - 27$$
$$y = x - 5x^2 - 9 \quad \text{oppure ordinando}$$
$$y = -5x^2 + x - 9.$$

Ora solo possiamo affermare che y è una funzione di x, poichè per qualunque valore di x, potremo trovare un determinato valore di y. E possiamo naturalmente ricavare un numero infinito di valori di y, come lo si può vedere dalla seguente tabella che dà i risultati dei nostri calcoli per un certo numero di valori della x, scelti affatto ad arbitrio:

x	y	x	y	x	y
1	-13	$\frac{1}{2}$	$-\frac{39}{4}$	0	-9
2	-27	$\frac{2}{3}$	$-\frac{95}{9}$	$\sqrt{2}$	$-17.586\ldots$
3	-51	$\frac{1}{8}$	$-\frac{573}{64}$	π	$-55{,}2064$
4	-85	$\frac{4}{7}$	$-\frac{493}{49}$	e	$-43{,}227\ldots$

Nella prima colonna noi abbiamo preso per x dei numeri interi positivi semplici, nella terza delle frazioni ordinarie e nella penultima lo zero o dei numeri irrazionali. Sempre abbiamo potuto ricavare un valore ben determinato per y. Abbiamo così tante coppie di valori x y quanti valori per x abbiamo scelto.

Ma con ciò non abbiamo ancora risolto il primo problema: perchè abbiamo chiamato y un numero, un numero magico? Rispondiamo che l'y è un numero mobile, a più significati, il quale dipende dai valori della variabile x e di quella data variabile che ad esso particolarmente si riferisce. Anche quando noi scegliessimo questa x ad arbitrio, y non può assumere un valore qualunque. Per quanto minime sieno le differenze fra i valori scelti per la x, la y fornirà sempre una serie di valori ben definiti che si susseguono in un dato ordine, che è strettamente, necessariamente dipendente da quelli della x.

Dal punto di vista cinematico la y fornisce la curva, la traiettoria dei punti determinati dal variare di x nel piano dei numeri, cioè il grafico della funzione in esame.

Noi possiamo affermare con altrettanta sicurezza che una funzione non è altro che una serie di coppie di valori di x e di y. E da questa osservazione discende che una funzione ci può esser data in uno dei tre modi seguenti:

1° Come equazione o espressione esplicita od implicita fra due incognite (per limitarci a queste); come sarebbe: $y = -5x^2 + 3x - 9$.

2° Come « curva » della quale noi dobbiamo cercare la formola, la « funzione ».

3° Come specchietto di coppie di valori corrispondenti ricavati dall'osservazione; per es. dell'andamento di un fenomeno qualunque, continuo o discontinuo.

Nel secondo caso si deve trovare la funzione, cioè esprimerla analiticamente come relazione fra le coordinate della curva. Nel terzo caso si deve anzitutto accer-

tarsi se esiste o meno una dipendenza funzionale fra i valori delle coppie. Noi possiamo per es. osservare la variazione in più luoghi della pressione barometrica con la temperatura oppure col tempo. Nel primo caso stenteremo a trovare una relazione funzionale e forse non ne troveremo alcuna; nel secondo troveremo una relazione che ci fornisce la direzione dei venti dominanti.

Tuttavia non possiamo andare oltre, anche con le nostre profonde cognizioni, se non soccorriamo con mezzi analitici. Si tratta qui di vedere anzitutto come si può trasformare una funzione in un grafico: nell'ultimo capitolo vedremo poi come si possa fare l'operazione inversa: ricavare una funzione da una data curva e come si riesca a ricavare una curva continua da una serie discreta di coppie di valori.

Il nostro primo problema richiede tuttavia una piccola premessa: una convenzione sul sistema di coordinate. Essa non presenta difficoltà, poichè abbiamo già incontrato qualcosa di analogo a proposito della rappresentazione degli immaginari.

Noi seguiremo Cartesio e sceglieremo un cosiddetto « sistema di coordinate *ortogonali* » (parola che deriva dal greco e non vuol dire altro che: ad angolo retto), le quali prendono anche il nome di « coordinate cartesiane ». Questo sistema è di una semplicità estrema.

Si tracciano nel piano del disegno (fig. 32) due assi indefiniti che si tagliano ad angolo retto in 0. Si assume *o* come « origine » delle coordinate: l'asse ox si chiama asse delle « *ascisse* » (da ab-scindere, tagliar fuori), sul quale si segnano i valori delle variabili x o si tagliano fuori dei segmenti $\overline{ox}$ od $\overline{x - x_0}$, di data lunghezza. L'asse perpendicolare a questo si dice asse delle « ordinate ».

Questi due assi dividono il piano in quattro quadranti, che numereremo a partire dal quadrante in alto a destra (1° quadrante) e procedendo circolarmente intorno ad O

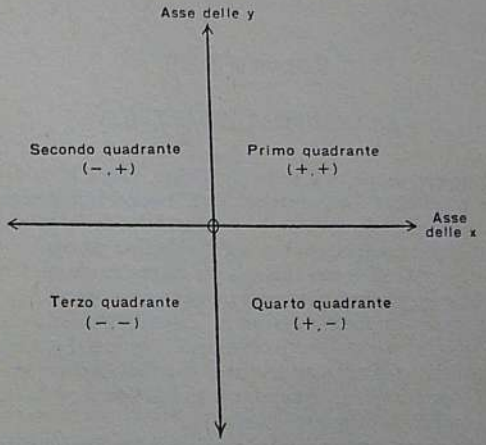


Fig. 32

da destra verso sinistra – senso contrario a quello del moto delle sfere di un orologio e che assumeremo come senso positivo di rotazione o di successione nel piano –. La figura mostra qual'è il senso positivo lungo gli assi: nel primo quadrante porteremo a partire da 0 le ascisse positive verso destra e le ordinate positive verso l'alto.

Con ciò siamo in grado di segnare con un punto nel piano ogni e qualsiasi coppia di valori corrispondenti di x e di y, purchè sieno valori reali. Dimentichiamo per un momento la rappresentazione nel piano dei numeri complessi che richiede un asse dei numeri reali ed uno, perpendicolare, dei numeri immaginari. La rappresentazione di coppie di valori di complessi e di immaginari richiede più di un piano e non entreremo in questo campo della cosiddetta « rappresentazione conforme ».

Capitolo XXII

GEOMETRIA ANALITICA

Il nostro scopo, più volte dichiarato, è quello di divulgare i principî fondamentali dell'Analisi infinitesimale, cioè di quella disciplina che in generale viene chiamata « Matematica superiore » e noi dobbiamo ad ogni passo avanti, renderci conto che stiamo raccogliendo materiale ed equipaggiandoci per raggiungere questa meta. Perciò dobbiamo per forza trascurare cammin facendo tante cose singole, per quanto interessanti ci possano sembrare, mentre tante altre cose vengono tracciate solo a grandi tratti, oppure sotto forma alquanto insolita per l'insegnamento ufficiale di queste discipline.

Così noi tratteremo ora in modo affatto frammentario la geometria analitica o delle coordinate, pur sapendo perfettamente che questa parte della Geometria è una delle basi e delle premesse essenziali dello studio delle matematiche superiori.

E ci metteremo senz'altro all'opera. Incominciamo col farci la domanda, apparentemente peregrina: « a quali condizioni devono soddisfare le perpendicolari comunque tracciate su di una retta perchè i loro estremi possano trovarsi su di un'altra retta? O meglio, facciamo come sovente in geometria, supponiamo il problema già risolto e dalla soluzione ricaviamo le condizioni per le quali esso è risolvibile.

Supponiamo tracciate nei punti da A a K della retta g (fig. 33) tante perpendicolari che abbiano tale lunghezza da giacere coll'altro loro estremo su di un'altra retta g^1: chiamiamo ordinatamente $l_0, l_1, l_2, \ldots, l_g$ i segmenti di perpendicolare compresi fra le due rette anzidette.

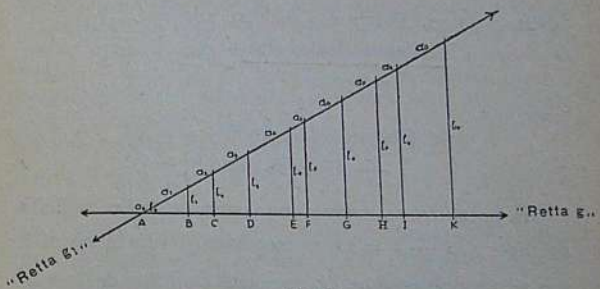


Fig. 33

Se assumiamo come origine o punto zero il punto A di loro incontro e scegliamo una unità di misura per le lunghezze, potremo collocare uno qualunque dei piedi B, C, D... K delle perpendicolari suddette in un «punto», rappresentato anche da un numero irrazionale. Per noi è indifferente che il numero anzidetto sia razionale o non.

Chiunque può vedere subito che per es. il segmento $\overline{AB}$, quello l, e il segmento a_1 formano un triangolo, che è affatto simile al triangolo successivamente più ampio $\overline{AC}$, l_2 e $(a_1 + a_2)$.

Questi due triangoli sono a loro volta simili entrambi al triangolo $\overline{AD}$, l_3, $(a_1 + a_2 + a_2)$ e così via dicendo, fino all'ultimo triangolo $\overline{AK}$, l_g e $(a_1 + a_2 + \ldots a_g)$. E si tratta di triangoli rettangoli. Questi saranno dunque simili se i due cateti sono fra di loro proporzionali. Questa è dunque la condizione perchè gli estremi dei segmenti $l_1\, l_2 \ldots l_g$ giacciano sulla retta g_1. E poichè la scelta delle distanze da A dei piedi delle perpendicolari, cioè di B, C, ... K, è stata assolutamente arbitraria, basterà stabilire un solo rapporto fra la lunghezza l del segmento di una perpendicolare qualunque e la distanza dall'origine A del piede di essa, per poter conoscere l'andamento

della retta g_1. Potremmo scrivere per es.:

$$\frac{\text{Distanza dall'origine}}{\text{segmento } l} = \frac{m}{n}$$

oppure

$$n \times (\text{distanza dall'origine}) = m \times l$$

$$l = \frac{n}{m} (\text{distanza dall'origine}).$$

Ora quest'ultima espressione è una funzione esplicita del tipo $y = \frac{n}{m} x = kx$ se eseguiamo la divisione di n per m. Questa sarebbe l'espressione analitica della condizione voluta perchè gli estremi dei segmenti l giacciano sulla retta g_1.

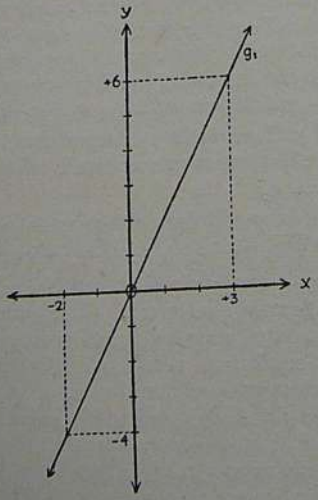


Fig. 34

E poichè una retta qualunque in un piano è determinata se se ne danno due punti, noi potremmo dare un senso concreto alla nostra funzione attribuendo a k un valore numerico come $k = 2$. Così potremo costruire la nostra retta nel sistema di coordinate cartesiane, dando ad x due valori qualunque (per es. $x_1 = 3$ e $x_2 = -2$) e ricavandone gli y_1 e y_2 corrispondenti:

$$y_1 = 2\,x_1 = 2 \cdot 3 = 6 \quad \text{e} \quad y_2 = 2\,x_2 = 2 \cdot (-2) = -4.$$

Ora il lettore può esercitarsi, con un foglio di carta quadrettata o millimetrata, a cercare il valore di y corrispondente ad un qualunque altro valore di x che prenderà sull'asse delle ascisse: troverà che esso si trova sempre sulla retta ora tracciata.

Non abbiamo fatto altro qui che trovare la equazione analitica di una data retta del piano: in essa entrambe le incognite figurano alla prima potenza e la funzione $y = kx$ si dice perciò una « *funzione lineare* » o equazione della retta.

E prima di procedere oltre, ancora una parola sull'uso promiscuo dei vocaboli « funzione » ed « equazione »: sciogliamo brevemente il dilemma. E lo faremo stabilendo che ogni funzione è un'equazione, in quanto, formalmente, si può scrivere sempre $y = f(x)$: ma ogni equazione non è affatto una funzione. Così $5x^2 + 3x + 9 = 27$ è certamente una equazione ma non una funzione: infatti in essa non trovo che una sola incognita x e non posso parlare nè di variabile indipendente nè di variabile dipendente.

Non abbiamo ancora finito con l'esame dell'equazione della nostra retta: la quale *deve* essere una funzione per essere rappresentabile analiticamente. Noi diciamo che anche:

$$y = 2x + 3$$

è una « funzione lineare », cioè è rappresentabile con una linea retta. Facciamone senz'altro la prova: Per $x = +3$

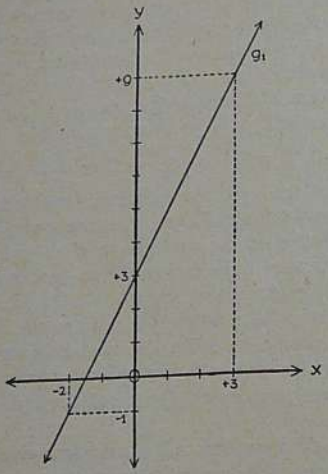


Fig. 35

otteniamo $y = 9$; per $x = (-2)$ sarà $y = (-1)$. Questa volta la retta non passa più per l'origine 0, ma taglia l'asse delle ordinate in corrispondenza del punto 3. Questo si poteva anche determinare col calcolo, ponendo $x = 0$: si ha $y = 3$. Ora, porre $x = 0$ vuol dire analiticamente, cercare quel punto dell'ordinata che è intersecato dalla retta in esame. Parimente facendo $y = 0$, troveremo il punto in cui la nostra retta interseca l'asse delle ascisse e che sarà $x = -\frac{3}{2}$. La nostra macchinetta per calcolare e pensare si rivela di nuovo come uno strumento magico, tanto più meraviglioso che esso accoppia la magia della geo-

metria con quella dell'aritmetica. Ce lo confermeranno alcuni esercizi un po' più complicati.

Ecco subito una prova del nostro asserto: Avevamo affermato che la forma generale dell'equazione di una retta, derivata da considerazioni della similarità di triangoli era:

$$y = \frac{n}{m} x$$

dove $\frac{n}{m}$ era il rapporto fra l'ordinata e l'ascissa.

BIBLIOTECA CIVICA

Per la stessa ragione questo rapporto è anche una funzione trigonometrica dell'angolo α. E ciò in grazia della nostra definizione della cosidetta funzione « tangente ». Calcolando il rapporto $\frac{n}{m}$, cioè eseguendo la divisione che ci darà per quoziente k, si avrà senz'altro il valore della tangente α (v. fig. 36). Cioè sempre in una funzione della forma esplicita: $y = kx + c$ (dove c è una costante) (1), il k è il valore della tangente dell'angolo α che la retta fa con l'asse delle ascisse. Quando ci sia nota la tangente di quest'angolo, ci è noto anche l'angolo, cioè l'inclinazione della retta considerata rispetto all'asse delle ascisse.

E ora che la nostra ambizione analitica è stimolata vogliamo trovare l'equazione anche di una linea curva, per es. del cerchio?

Si tratta di trovare un'espressione che per ogni valore di x ci fornisca un'ordinata y la cui estremità si trovi su di un cerchio.

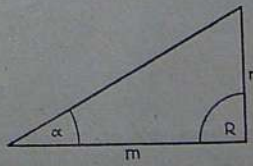


Fig. 36

(1) La costante aggiunta non cambia nulla nella funzione angolare, come ci se ne può capacitare disegnandola: non fa che spostare la retta, senza modificarne l'angolo con la retta base.

Se consideriamo la figura 37 che rappresenta un cerchio tracciato con centro nell'origine degli assi, noi vediamo che per il nostro caso non avrebbero senso che quei valori positivi o negativi della x che sono compresi nel raggio del cerchio; perchè una ordinata innalzata nel punto c non incontrerebbe mai il cerchio. Intanto, adoperando lo stesso metodo che per la retta, noi possiamo determinare dei punti particolari del nostro cerchio. Se

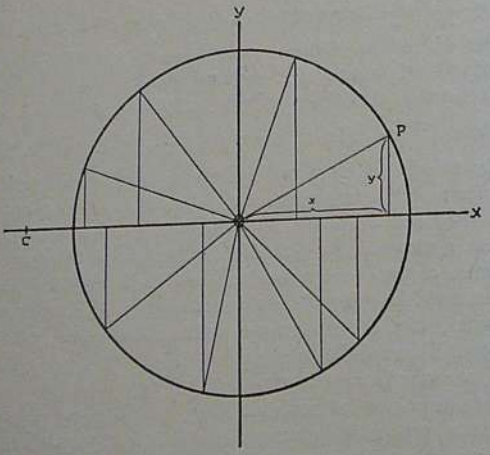


Fig 37

facciamo per es. $y = 0$ troveremo i punti in cui esso taglia l'asse delle x e se facciamo $x = 0$, troveremo quelli in cui taglia l'asse delle y. Tutti questi punti, secondo il nostro tracciato, devono distare dal centro di una quantità eguale al raggio r: cioè per $x = 0$, $y = \pm r$ per $y = 0$, $x = \pm r$. Consideriamo poi un punto P qualunque del cerchio, di coordinate x e y. Il teorema di

Pitagora ci fornisce subito una relazione fra il raggio r e le due variabili x ed y.

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{da cui ricaveremo}$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

I due valori, positivo e negativo di questa radice hanno uno stesso « valore assoluto » $|y| = |\sqrt{r^2 - x^2}|$. Uno sguardo alla figura ci mostra che, difatti, per ogni valore di x possiamo ricavare due valori di y che corrispondono l'uno alla ordinata positiva l'altra a quella negativa di x.

Ecco come la Geometria riesce a mostrarci in modo chiaro il significato del doppio segno di una radice.

Accenniamo ancora al fatto che, adoperando le coordinate, non facciamo veramente della Geometria, ci serviamo piuttosto delle linee dei numeri positivi e negativi di cui già più volte abbiamo fatto uso e ne adoperiamo due, una perpendicolare all'altra e aventi i loro zeri coincidenti nell'origine. Ed operiamo con coppie di valori in uno dei quattro quadranti in cui dette linee dividono il piano. E queste coppie di valori assumono, in questa rappresentazione simbolica, il carattere di « punti del piano », cioè danno luogo a punti caratteristici nel piano, inconfondibili con altri. E questi punti possono essere elementi di figure geometriche, – linee – che soddisfano a determinate leggi o corrispondono a determinate funzioni fra i valori corrispondenti della coppia considerata.

Ma vogliamo concretare ancora in un altro modo la nostra geometria delle coordinate. Vogliamo cioè, in modo accorto, giungere alla risoluzione di una equazione di secondo grado per mezzo della equazione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ del cerchio. Procediamo come abbiamo fatto qui sopra e nell'equazione: $y^2 = r^2 - x^2$ poniamo anzitutto $y = 0$;

avremo $0 = r^2 - x^2$, ossia $x^2 = r^2$ e $x = \sqrt{r^2} = \pm r$. Tracciamo allora i punti di ascissa P positiva e Q negativa. E qui di nuovo la Geometria analitica ci fornisce un significato del doppio segno della radice quadrata.

Di passata, riveliamo qui, che con la considerazione fatta qui sopra noi abbiamo toccato un argomento importantissimo: questo, che noi possiamo considerare ogni equazione ad una sola incognita come una funzione nella quale si sia fatto $y = 0$.

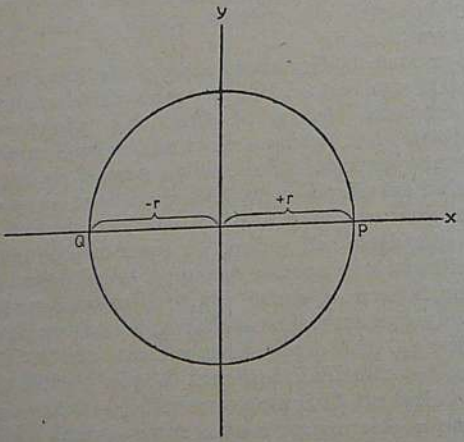


Fig. 38

Per es. dalla equazione $x^2 - 2x - 15 = 0$ noi potremmo ricavare la funzione:

$$y = x^2 - 2x - 15$$

e, graficamente, l'x che si sta cercando deve trovarsi in quel punto dell'asse delle ascisse che viene intersecato dalla curva rappresentativa della funzione (cioè in quel

punto in cui y è zero). Se disegniamo la curva in carta millimetrata, tracciando in questa due assi coordinati, vedremo che essa taglia l'asse delle x nei due punti $x = +5$ ed $x = -3$.

Questo modo grafico viene adoperato sovente per risolvere approssimativamente delle equazioni di difficile risoluzione aritmetica. Queste sono le equazioni in cui la x figura ad una potenza superiore alla quarta.

In poche parole, data una siffatta equazione, si pone in essa, al posto della x un valore qualunque, se ne ricava la y corrispondente e si traccia la curva per punti dopo aver calcolato un certo numero di coppie $x_1\, y_1$,

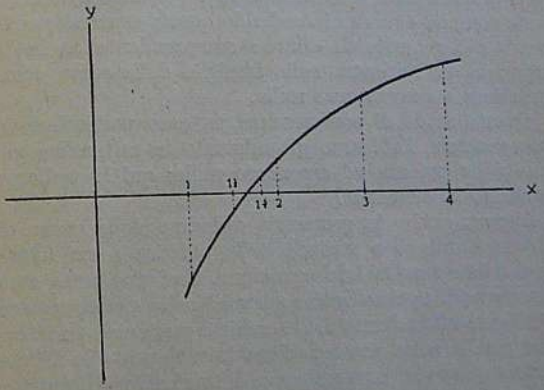


Fig. 39

$x_2\, y_2 \ldots x_n\, y_n$ di punti: si vede dove la curva taglia l'asse delle ascisse (fig. 39); per $x = 1\frac{1}{2}$ la curva si trova ancora sotto l'asse delle x mentre per $x = 1\frac{5}{6}$ essa è già passata al disopra di esso: allora il valore per $y = 0$ di x sarà compreso tra questi due numeri frazionari: se non lo si può determinare con assoluta esattezza, lo

si può tuttavia ottenere con quella approssimazione che si desidera. Siccome il valore di x che risolve l'equazione si trova fra i due valori non esatti (falsi) qui sopra indicati, questo metodo, largamente usato nei tempi andati, si chiamava « Regula falsi » o di falsa posizione. Ma così non si determina che un solo valore della x. Chè se l'equazione è di secondo grado essa ammette due valori di x che la risolvono, se di quinto grado, cinque valori, mentre un'equazione lineare non ammette che un solo valore della x che la risolva.

Concludendo questo capitolo, possiamo assodare questo: ogni funzione avente la forma generale $y = f(x)$ si può rappresentare graficamente in un sistema di coordinate con una « curva » intendendo questa espressione nel senso più generale di « linea » comprendente anche la retta: la quale rientra nella famiglia delle curve come una linea a « curvatura » nulla.

Questo modo di comprendere un caso particolare in uno generale, l'abbiamo già adottato in aritmetica nel caso della potenza ad esponente nullo: qui lo vediamo applicato in geometria.

Ancora: anche in geometria abbiamo delle curve di diverso « ordine » a seconda della potenza a cui figura la variabile x nella loro equazione. Così una retta sarà una curva di « primo ordine » perchè nella sua equazione la x figura alla potenza 1. Il cerchio è una curva di 2° ordine perchè nella sua equazione la x figura alla 2ª potenza e così via. Avremo curve di terz'ordine, di quarto, di quint'ordine.

Ora in Geometria analitica si presentano molti problemi attraenti, ma dobbiamo procedere spediti e lasciare tutti questi problemi di Geometria analitica inferiore per salire verso quelli dell'« Analisi superiore ». Per comprendere questi li porremo in tutta la loro netta precisione nel prossimo capitolo, seguendone per sommi capi anche lo sviluppo storico.

Capitolo XXIII

PROBLEMI DI QUADRATURA

In un modo o nell'altro, tutti hanno sentito parlare della « quadratura del circolo » non fosse che come uno di quei problemi insolubili, trascendentali. Ne parla persino Dante nel *Paradiso* (canto XXXIII):

> Qual'è il geometra che tutto s'affligge
> Per misurar lo cerchio, e non ritrova
> Pensando, quel principio ond'egli indige;

Che cosa sarebbe questa quadratura? La parola vorrebbe veramente significare la ricerca di un quadrato che fosse equivalente al circolo e avrebbe attinenza alla ricerca del valore di π di cui abbiamo già parlato: è un problema che era stato posto già 2000 anni avanti Cristo, e risolto approssimativamente dagli Egizi, ma senza dimostrazione. Si diceva solo che il cerchio è equivalente al quadrato avente per lato gli $\frac{8}{9}$ del diametro. Diamo anche noi a quadratura il significato di determinazione di area. È evidente che si può determinare un'area scomponendo la superficie, anche assai irregolare, in tanti quadratini eguali di area nota. Per es., si può rilevare il contorno irregolare di una superficie piana su carta trasparente, poi, applicandola su carta millimetrata, contare tutti i centimetri quadrati e millimetri quadrati contenuti entro quel contorno. Questa operazione ci dà un'idea grossolana della quadratura: vedremo tosto metodi più rigorosi e precisi.

La quadratura del circolo si può fare con una grandissima approssimazione; basta moltiplicare il quadrato del raggio r per π. Ora π è un numero « incommensura-

bile » rappresentato, come sappiamo, da una frazione decimale che non finisce mai. Siccome però il suo valore è stato calcolato fino alla settecentesima cifra decimale, potremmo accontentarci di questa approssimazione.

Il grande Archimede sapeva già che esistono figure geometriche assai più complicate del cerchio e della cui superficie non si può calcolare l'area, nemmeno con numeri irrazionali. Vedremo più avanti come ne ha risolto la quadratura.

Il teorema di Pitagora fu esteso ad altre figure che ai quadrati costruiti sui cateti e sull'ipotenusa. E questo già dal tempo di Ippocrate di Chio.

Per es.: se costruiamo sui cateti e sulla ipotenusa delle figure simili: triangoli rettangoli come nella figura 40 o semicerchi come nella figura 41, qui contro, sempre l'area della somma dei triangoli rettangoli costruiti sui cateti *a* e *b* è uguale a quella del triangolo rettangolo costruito sull'ipotenusa *c*. La cosa si vede a colpo d'occhio nella fig. 40.

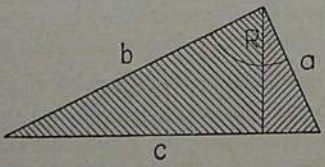


Fig. 40

I due triangoli, tratteggiati in modo diverso, costruiti sui due cateti, hanno un'area complessiva eguale a quella del triangolo costruito sull'ipotenusa.

Parimenti anche il semicerchio costruito sulla ipotenusa ha un'area eguale alla somma delle aree dei semicerchi aventi per diametro i due cateti, perchè anche i semicerchi, come i triangoli rettangoli dell'esempio precedente, sono figure simili, come lo sono i quadrati del teorema originale.

Poichè l'area del semicerchio costruito sull'ipotenusa come diametro è uguale all'area del triangolo rettangolo (tratteggiato) costruito sulla stessa base più i due segmenti s_1, s_2 che appaiono in bianco nella figura 41, mentre

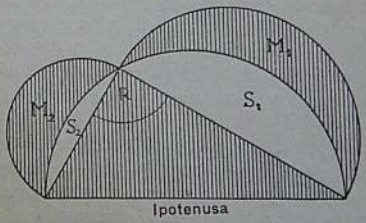


Fig. 41

i semicerchi costruiti sui due cateti si possono considerare ciascuno come la somma del segmento e della «lunula» M tratteggiata, dovrà sussistere, per il teorema di Pitagora esteso, la eguaglianza:

Superficie del triangolo $+ S_1 + S_2 = (M_1 + S_1) + (M_2 + S_2)$
oppure:
Superficie del triangolo $+ (S_1 + S_2) = (M_1 + M_2) + (S_1 + S_2)$
oppure:
Superficie del triangolo $= (M_1 + M_2) + (S_1 + S_2) - (S_1 + S_2)$
Superficie del triangolo $= (M_1 + M_2)$

Con nostra meraviglia vediamo come si possa trovare l'area delle due lunule, mediante il semplice calcolo di quella di un triangolo. Il problema è stato proposto e risolto da Ippocrate. Dalla forma curva del contorno delle lunule si sarebbe pensato che la loro area venisse espressa da un numero irrazionale, mentre vediamo che può esprimersi con un numero intero e razionale qual'è quello che dà l'area del triangolo che è il semiprodotto del valore dei due cateti.

E siccome queste cose erano note già dal tempo dei geometri greci, si era sempre creduto che la quadratura del circolo non potesse farsi che per difetto di metodo; semplicemente perchè non si sapeva adoperare bene la riga ed il compasso. Non fu che poco più di cinquant'anni fa che il Lindemann riuscì a dimostrare l'impossibilità di quadrare il cerchio con la sola riga e compasso; anzi dimostrò che l'espressione di π che entra nella formola πr^2 dell'area del cerchio è un numero trascendente (non nel senso metafisico, ma semplicemente perchè non algebrico.

Questo ci porta a chiarire il significato di « numero trascendente » e di « numero algebrico ». È algebrico un numero che può essere soluzione di un'equazione algebrica a coefficienti interi e reali, « trascendente » in caso contrario. E come i numeri, così anche le funzioni si dividono in algebriche e trascendenti e quindi avremo anche delle curve, nel piano coordinato, che saranno algebriche o trascendenti.

In relazione alla quadratura delle superfici, sta la cubatura dei volumi, che al pari della prima fu oggetto di lunghi studi da parte dei geometri dell'antichità. Nell'anno 1624, nell'alta Austria, il raccolto dell'uva fu così abbondante da interessare l'astronomo Keplero: il quale non solo determinò il modo di calcolare la cubatura delle botti da vino, ma trovò un metodo, che esamineremo più avanti, per calcolare la botte di massima capacità (cubatura interna) per la minima superficie (la quale incide sul quantitativo di legname necessario per costruire la botte stessa).

Nel secolo XVII ancora, si occuparono di problemi di cubatura, il Fermat e Pascal in Francia, il Cavalieri in Italia, il Wallis in Inghilterra, fino a che vennero Newton e Leibnitz che colla geometria e l'analisi infinitesimale ci fornirono i mezzi di eseguire calcoli di cubatura, di quadratura e di determinazione della lunghezza degli

archi di curva (rettificazione) che andremo ora esaminando.

Dopo questi pochi cenni storici, accingiamoci a risolvere il problema della quadratura, procedendo passo a passo e in modo di renderci conto, nelle diverse tappe, di quel che andiamo facendo. Rinunciamo espressamente ad ogni sottigliezza filosofica ed attacchiamo l'argomento in un modo che darà sovente occasione al nostro implacabile contraddittore di alzare inorridito gli occhi al cielo. Siamo del parere che una comprensione anche solo approssimata è meglio di nessuna. Particolarmente in quei casi in cui non commettiamo peccati maggiori di quello di ricordare punti di vista sorpassati, ma che persino i grandi matematici del tempo non ritenevano falsi.

Il lettore ambizioso potrà sempre, più tardi, con la lettura delle opere rigorose dei matematici moderni, purificarsi da tali eresie.

Per cominciare, osserviamo che il problema della quadratura (1) ha potuto porsi nella sua più grande generalità solo dopo la fondazione della geometria e del calcolo per coordinate, cioè dopo Cartesio. Proponiamoci di calcolare l'area di una figura, per es. di O B C limitata da una parte da una curva $\overset{\frown}{OB}$ qualsiasi (fig. 42). Di questa curva noi conosciamo l'equazione $y = f(x)$ così che, ponendo al posto di x un qualunque valore concreto, potremo ricavare il valore corrispondente di y. Incomincieremo con un caso semplice, ma premettiamo che $f(x)$ può essere una qualunque espressione anche assai complessa di x, costituita per es. da un insieme di potenze di x con coefficienti e di termini costanti.

Forse il principiante sarà turbato da questa nostra premessa: noi non calcoleremo più con numeri algebrici ma con funzioni nelle quali i valori della x vengono scelti

(1) Il problema analogo della cubatura sarà da noi lasciato in disparte, volendo noi qui limitarci alla geometria analitica del piano.

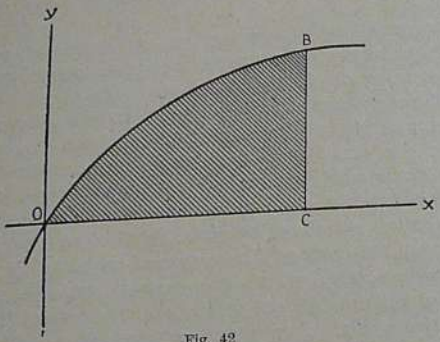


Fig. 42

ad arbitrio ed i valori delle y ne vengono ricavati: y ad f(x) sono perciò eguali e, geometricamente, non sono altro che ordinate elevate sopra l'ascissa x. Le estremità di queste ordinate costituiscono tanti punti della curva rappresentativa della funzione.

Ancora un'osservazione prima di procedere alla scoperta della quadratura: si può chiamare « funzione » il fatto della dipendenza di una grandezza da un'altra in virtù di una certa legge. L'elevazione di una colonna di mercurio in un tubo di vetro può essere funzione della temperatura, se il tubo termina in un bulbo chiuso ermeticamente; diventa invece funzione della pressione atmosferica – secondo una legge affatto diversa – se il tubo pesca in un pozzetto aperto pieno di mercurio. La velocità di caduta di un grave è funzione della forza d'attrazione terrestre o meglio dell'accelerazione della gravità.

La statura di un ragazzo può in un certo senso dirsi funzione dell'età: anche il sapore di un vino prelibato o del formaggio di Gorgonzola !

Siccome anche l'area del cerchio dipende dal raggio di questo, noi diremo che essa è una funzione del raggio.

Come altro esempio, scegliamone uno dalla nostra vita quotidiana: ogni fumatore buon intenditore sa che le sigarette sono tanto più « dolci » quanto più sono grosse. Uno stesso tabacco arrotolato in sigarette sottili ha un gusto più forte che in un tubetto di diametro più grande. Come spiegare la cosa? Semplicemente così: La quantità di carta cresce in misura « lineare » con l'aumento di volume della sigaretta, mentre la sezione di tabacco che va via via bruciando, cresce in misura quadratica. Se diciamo r il raggio della sigaretta, il tubetto cresce in ragione diretta del raggio, perchè aumenta con la circonferenza $2\pi r$ della sigaretta; il tabacco invece cresce con l'area πr^2 della sezione del tubetto, quindi la « forza » della sigaretta, che dipende dalla carta, cresce proporzionalmente al diametro, mentre la « dolcezza » del tabacco cresce col quadrato del diametro. Il rapporto fra la forza e la dolcezza va dunque diminuendo coll'aumentare della grossezza della sigaretta [1].

E per finire facciamo un esempio paradossale, che prendiamo dall'ottimo trattato di Georg Scheffers. Supponiamo di voler fasciare la nostra vecchia terra con un anello di ferro che la cinga in corrispondenza dell'equatore e che questo anello sia suddiviso in metri. Dovremmo naturalmente supporre che la terra all'equatore sia tanto liscia da potervi infilare questo nostro anello con una certa facilità. Ora si chiede:

Di quanto si allenterà il nostro anello, cioè di quanto verrà a distare dalla superficie della terra (o del mare) se lo allungassimo di un solo metro?

Un allungamento di un metro sopra tanti milioni di metri sarà assolutamente trascurabile, direte voi. Eppure la cosa non è così evidente: il nostro esempio ci mostrerà come le stime « a buon senso » non sono poi così sicure

(1) Se volessimo esprimere questo in modo geometrico, diremmo che la « forza » cresce secondo una linea retta e la « dolcezza » secondo una linea parabolica.

di quanto crediamo e ci persuaderà della meravigliosa precisione e « univocità » della matematica. Ragioniamo dunque così: « la circonferenza dell'anello primitivo è uguale a $2\pi r$, quindi il raggio è dato dal rapporto $\frac{2\pi r}{2\pi}$. La circonferenza aumentata di 1 metro darà, per r espresso in metri: $\frac{2\pi r + 1}{2\pi}$. Se sottragghiamo da questa la minore circonferenza primitiva avremo:

$$\frac{2\pi r + 1}{2\pi} - \frac{2\pi r}{2\pi} = \text{distacco A dell'anello nel senso del raggio.}$$

$$A = \frac{2\pi r}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} - \frac{2\pi r}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{6{,}28} = 0{,}1592\ldots$$

cioè in cifra tonda 16 centimetri. Il nostro anello intorno alla terra per il solo aumento di 1 metro su 40 mila chilometri circa di sviluppo, viene a staccarsi di circa 16 centimetri dalla terra (circa mezza spanna)! C'è di che stupire di questo risultato, ma il matematico non si meraviglia. Egli vede nella relazione $A = \frac{1}{2\pi}$ che questo distacco dipende solo da π cioè da una grandezza che non ha nulla di comune col raggio. Egli scrive la funzione $y = A = f(x)$ e così esprime il fatto che il distacco provocato dall'inserzione nell'anello di un segmento « seg. » di data lunghezza cresce in eguale proporzione con la circonferenza, si tratti dell'anello nuziale attorno al dito di una sposa o del nostro anello di ferro attorno all'equatore o su di un ellissi della grandezza della traiettoria del pianeta Nettuno attorno al sole. Sempre si avrà: $y = \frac{\text{seg.}}{2\pi}$ dove « seg. » è il pezzetto aggiunto all'anello.

Se questo segmento crescesse fino a diventare eguale alla circonferenza stessa avremmo

$$y = \frac{2\pi r}{2\pi} = r$$

cioè il raggio raddoppierebbe.

« Per il tecnico aggiungerò che questo esempio illustra anche un fenomeno frequente: i cerchioni delle ruote dei veicoli ferroviari, vengono forzati a caldo sulla periferia delle ruote. Una lunga frenata li può far riscaldare e quindi dilatare ed anche allentare. Perciò i viaggiatori vedono durante le fermate di un diretto, quel certo operaio che va picchiando con un lungo martello sulle ruote per sentire se danno un suono vibrante, o se rendono un suono « morto » segno di allentamento del cerchione ». (N. d. Tr.).

Torniamo ora alle nostre quadrature: ci eravamo già proposti il problema di calcolare l'area di una superficie limitata da due ordinate y_1 e y_2 dall'ascissa e da una curva di cui conosciamo l'equazione

$$y = f(x).$$

Si vede dalla figura 43 che l'area da noi cercata deve esser compresa fra la somma di tutte le striscie rettangolari che comprendono il rettangolino tratteggiato e la somma di tutte le striscie che non comprendono detto rettangolino.

Se invece di avere una curva che limita superiormente la mia superficie, avessi una retta, la cosa sarebbe di una semplicità estrema. Non avrei che a dividere per metà, con una diagonale, ciascuno dei rettangolini tratteggiati ed aggiungerne la somma alla somma delle mie striscie più corte.

Avendo invece una curva posso immaginare inscritta in essa, in corrispondenza di ogni striscia verticale una spezzata formata dalla diagonale di ogni rettangolino tratteggiato.

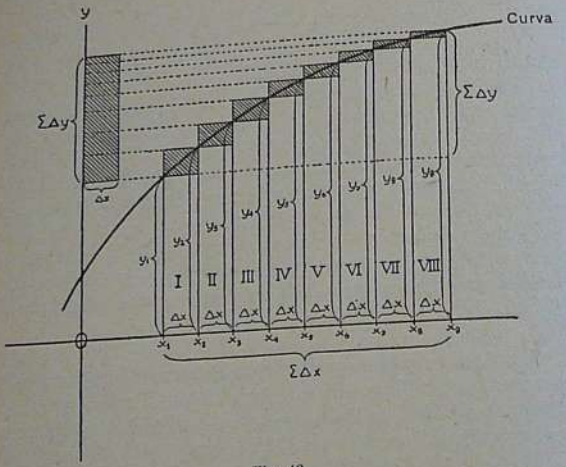


Fig. 43

Proviamo a misurare le singole striscie per ordine:

Striscia I area $(x_2 - x_1) \cdot y_1$
» II » $(x_3 - x_2) \cdot y_2$
» III » $(x_4 - x_3) \cdot y_3$
e così via
» VIII area $(x_9 - x_8) \cdot y_8$

e siccome le striscie hanno tutte eguale larghezza, chiameremo Δx la differenza comune fra le ascisse estreme $(x_2 - x_1)$ o $(x_9 - x_8)$.

La somma delle aree di tutte le striscie sarà:

$$S_e = y_1 \cdot \Delta x + y_2 \cdot \Delta x + y_3 \cdot \Delta x + \ldots + y_8 \cdot \Delta x.$$

La somma invece delle aree delle striscie più alte (quelle che comprendono i rettangolini a tratteggio) sarà evi-

dentemente data da:

$$S_n = y_2\Delta x + y_3\Delta x + y_4\Delta x + \ldots + y_9\Delta x.$$

Queste somme si possono esprimere più concisamente col simbolo di sommatoria

$$S_e = \sum_{n=1}^{n=8} y_n\,\Delta x \quad \text{e} \quad S_n = \sum_{n=2}^{n=9} y_n\,\Delta x$$

e poichè Δx è una costante possiamo metterla a fattor comune prima della sommatoria, così:

$$S_e = \Delta x \sum_{n=1}^{n=8} y_n \quad \text{e} \quad S_n = \Delta x \sum_{n=2}^{n=9} y_n\,.$$

L'area che noi stiamo cercando sarà dunque compresa fra questi due valori di aree, perfettamente determinabili:

$$\Delta x \sum_{n=1}^{n=8} y_n < \text{Area cercata} < \Delta x \sum_{n=2}^{n=9} y_n$$

e che stabiliscono matematicamente l'area della superficie a gradini che è inscritta e quella che è circoscritta alla curva data.

Come si vede noi seguiamo un metodo non molto diverso da quello di esaustione così abilmente sfruttato dai geometri dell'antichità: da Archimede a Galileo Galilei e al Viviani, ma che in generale non ci dà che dei valori approssimati « per difetto » o « per eccesso » dell'area cercata.

Processo lungo e faticoso come vedremo subito e che è stato poi sostituito da un altro rapido ed elegante.

Proponiamoci, tanto per avere un'idea del metodo antico, di calcolare con esso l'area di una superficie limitata superiormente da un arco di parabola avente per equazione $y = \frac{x^2}{5} + 3$ e ciò fra le ascisse $x_1 = 5$ e $x_{1000} = 10$.

Prima cosa da farsi è di determinare la grandezza di Δx: poichè fra le due ascisse estreme non prevediamo meno di 999 striscioline tutte eguali sarà $\Delta x = \frac{10-5}{999} = \frac{5}{999}$. Allora dovremo calcolare « passo passo » un migliaio di y. Così:

$$x_1 = 5 \qquad y_1 = \frac{25}{5} + 3 = 8$$

$$x_2 = 5 + \frac{5}{999} \qquad y_2 = \frac{\left(5 + \frac{5}{999}\right)^2}{5} + 3$$

$$x_3 = 5 + \frac{10}{999} \qquad y_3 = \frac{\left(5 + \frac{10}{999}\right)^2}{5} + 3$$

e così via.

Poi dovremo inoltre calcolare tutte le striscioline inscritte e tutte le circoscritte, così:

Strisciolina inscritta $1 = y_1 \Delta x = 8 \cdot \frac{5}{999} = \frac{40}{999}$

» » $2 = y_2 \Delta x = \left[\frac{\left(5 + \frac{5}{999}\right)^2}{5} + 3\right] \cdot \frac{5}{999}$

e così via.

$$\text{Strisciolina circoscritta } 1 = y_2 \Delta x = \left[\frac{\left(5+\frac{5}{999}\right)^2}{5}+3\right]\cdot\frac{5}{999}$$

$$\text{» » } 2 = y_3 \Delta x = \left[\frac{\left(5+\frac{10}{999}\right)^2}{5}+3\right]\cdot\frac{5}{999}$$

e così via.

Quand'anche si scegliessero 1000 striscioline, invece di 999, per semplificare i calcoli, si vede già che questo calcolo, con una funzione semplice come la:

$$y = \frac{x^2}{5} + 3$$

risulta estremamente laborioso; per giungere poi ad un risultato solo approssimato.

Si vede però anche questo: che la precisione o se si vuole il grado di approssimazione del calcolo dell'area cresce col crescere del numero di striscioline. Se quindi scegliessimo per Δx il valore più piccolo possibile (per es. dx) che rappresenta una dimensione che tende allo zero, noi troveremmo un valore esatto per la nostra quadratura cioè per l'area cercata. Ma allora dovremmo calcolare un numero infinito di y, poichè la lunghezza considerata per ascissa comporta infiniti dx.

Si richiede per la quadratura una operazione che permetta di eseguire la somma del prodotto per dx di tutte le infinite ordinate comprese nel campo $x_n - x_1$ delle ascisse. Il grande matematico Cavalieri [1] chiamava il problema della quadratura « Summa omnium y » (som-

(1) Bonaventura Cavalieri, milanese (1598-1647) fu professore a Bologna e scrisse fra l'altro un trattato di Geometria dei continui indivisibili (N. d. Tr.).

ma di tutti gli y), mentre Leibnitz annotava su quella cartella storica del 29 ottobre 1676 le parole: « Sarebbe utile di scrivere il segno $\int ydx$ invece della « Summa omnium y » del Cavalieri ».

Eccoci arrivati in vetta, allo scopo che si prefigge questo libro. Leibnitz considera « utile » la notazione da lui proposta qui sopra.

È forse tutto questo un semplice giuoco oppure c'è qualcosa di serio dietro di esso? Una qualche nuova « vera Cabala »?

Cerchiamo di accertarlo procedendo un passo per volta. Ad ogni modo sappiamo ora precisamente quel che ci si domanda. Chiariamolo ancora. Come per il segno di sommatoria Σ noi noteremo anche per l'integrale $\int$ i limiti entro i quali esso va considerato, così da trasformarlo in « integrale determinato ». Se la prima x che l'interessa ha il valore a e la ultima il valore b, cioè se la variabile è compresa entro il « campo » a — b, noi scriveremo:

$$\int_a^b ydx$$

e leggeremo: integrale definito tra a e b o nel campo ab dove a è il limite inferiore e b il limite superiore. Poi facciamo un passo avanti: Sappiamo che y è una funzione di x; $y = f(x)$; quindi possiamo anche scrivere:

$$\int_a^b ydx = \int_a^b f(x)dx.$$

Ecco il comando. Manca ancora la regola per eseguirlo, altrimenti il comando, di per sè, sarebbe incomprensibile. Guardiamo dunque dentro attentamente in questo segno misterioso; vediamo che cosa succede se un matematico eseguisce questo comando.

Questa espressione magica ci ordina insomma di eseguire la somma dei seguenti prodotti:

1ª	Striscia	$f(a)\cdot dx$
2ª	»	$f(a+dx)\cdot dx$
3ª	»	$f(a+2dx)\cdot dx$
4ª	»	$f(a+3dx)\cdot dx$
Penultima	striscia	$f(b-dx)\cdot dx$
Ultima	»	$f(b)\cdot dx$

dove f (a), f (a + dx) ecc. stanno al posto dei successivi valori di y, che si ricavano dai valori $x = a$, $x = a + dx$, $x = a + 2dx$ ecc.

Di più dev'essere dx il più piccolo valore di x prima del limite zero o come si dice dx dev'essere infinitamente piccolo.

E poichè Leibnitz e quegli altri grandi che hanno fondato questa scienza degli infinitesimi avevano la loro testa saldamente a posto, non brontoleremo di questo loro regalo dell'analisi infinitesimale e la riceveremo con riconoscenza dalle loro mani.

Regola di l'Hopital. — Sotto questo nome s'intende un artificio di calcolo assai curioso che si può considerare come applicazione delle derivate.

Si supponga di dover calcolare il vero valore di un rapporto i cui due termini sieno nulli, cioè ad un rapporto che conduca alla forma indeterminata 0/0. Ne abbiamo visto un caso a pag. 54.

Per fare un esempio si supponga che ci venga chiesto di calcolare il vero valore del rapporto:

$$\frac{x + 3x - 4}{4x - 6x + 2} \quad \text{per } x = 1$$

se si sostituisce ad x 1 si trova $\frac{1 + 3 - 4}{4 - 6 + 2} = \frac{0}{0}$;

ora la regola di l'Hopital dice che si deve sostituire al rapporto delle due espressioni il rapporto delle loro derivate. Eseguendo si ottiene:

$\frac{2x + 3}{8x - 6}$ nel quale, sostituendo 1 ad x, si ottiene il rapporto 5/2.

Dunque il vero rapporto delle due prime espressioni è 5 a 2 e l'indeterminazione non era che apparente.

Questa regola si giustifica intuitivamente: il valore zero delle due funzioni per $x = 1$ non è che uno dei tanti valori che essa può assumere per diversi valori della variabile; in questo caso per $x = 1$ esse passano entrambe per lo zero.

Facendo il rapporto delle derivate della funzione noi facciamo il rapporto del loro incremento, perchè le funzioni essendo nulle per quel valore di x ciascuna risulta eguale al suo incremento. Il rapporto di questi incrementi in generale non è zero; se lo fosse, si deriverebbe una seconda volta e si farebbe il rapporto delle derivate seconde (N. d. Tr.).

Capitolo XXIV

IL DIFFERENZIALE E IL PROBLEMA DELLA RETTIFICAZIONE

Abbiamo già parlato ripetutamente di Δx, Δy e di dx e dy e abbiamo indicato specialmente questi due ultimi come una specie di chiave della porta d'accesso alle matematiche superiori. Guardiamo ancora, un po' più da vicino, queste cosine così minute: il chiamarle « cose » è già una grave eresia. Eppure i differenziali non sono neppure cose inesistenti: a rigore di teoria essi sono differenze evanescenti per la loro estrema piccolezza e rappresentano il limite estremo di quei Δx e Δy le cui dimensioni si possono ancora concepire e misurare.

Se noi cerchiamo di materializzarle è per una ragione in parte storica, in parte pedagogica. E poichè questo nostro è un libro d'iniziazione, che deve per così dire fornire i primi rudimenti per giungere a comprendere gli infinitesimi, non si può abbastanza procedere per esempi e materializzazioni. Anche storicamente questa nostra Scienza si è basata molto sulle percezioni sensibili e, per mezzo di materializzazioni, si sono fatte le prime grandi scoperte in essa. Se poi si è edificata, su questo solido fondamento materiale, una scienza astratta con tutte le sue raffinatezze logiche, nei due secoli che seguirono, questo non ci autorizza a considerarne i primi pionieri come gente rozza o primitiva.

Anche il diamante dall'acqua più limpida è stato estratto come rozzo ciottolo dalle terre azzurre dei giacimenti sudafricani. Certo non è da disprezzarsi il lavoro paziente dell'operaio faccettatore di Amsterdam che gli ha dato modo di sprizzar lampi di luce multicolore dalle

sue faccette sapientemente tagliate; ma senza diamante, niente barbagli di luce.

E così anche senza una prima grossolana rappresentazione del « differenziale », niente matematica pura moderna.

Rimandiamo ogni quistione sottile al momento in cui, dopo lungo studio dei fondamenti, possederemo appieno il concetto base del differenziale. Allora potremo godere la precisione di un Cesaro, la concisione di un Peano, l'eleganza di un Kowalewski e meravigliarci dell'arte loro.

Per il momento rappresentiamoci una curva nella quale, col crescere delle x cresca anche la y: L'incremento della x l'abbiamo già indicato con Δx, quello della y con Δy o con $\Delta f(x)$.

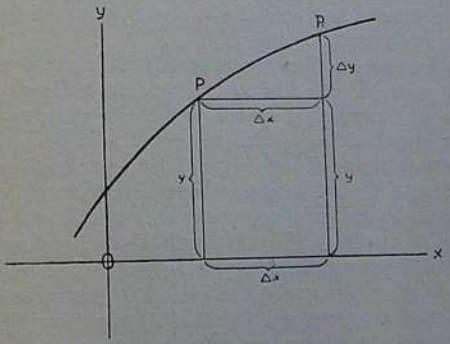


Fig. 44

La x il cui corrispondente y determina in modo univoco un punto P nel piano delle coordinate cartesiane, sia cresciuta di una quantità finita Δx; in seguito a ciò la y è necessariamente (forzatamente) cresciuta di Δy

ed è diventata $(y + \Delta y)$. Il punto P_1 della curva segna l'estremità di questa nuova ordinata. Il tratto PP_1 è in generale un tratto curvo che fa parte della curva data:

Se ora invece di far crescere la x di una quantità finita, la faccio aumentare di una quantità infinitesima dx, anche l'incremento corrispondente della y sarà un infinitesimo dy ed i due punti P_1 e P della curva verrebbero a trovarsi infinitamente vicini (a costituire per modo di dire un punto doppio della curva) e il tratto P_1P interdetto della curva, sarà parimente evanescentemente breve: così breve che sarà per noi indifferente di considerarlo come tratto di curva oppure di retta.

Ora questa fusione, al limite, di un tratto di curva con un tratto equivalente di retta, costituisce il perno di tutta l'analisi infinitesimale. Poichè di qui ha origine la possibilità di applicare a tratti infinitamente brevi di curve tutte le regole che ci siamo fatte per le figure limitate da tratti rettilinei.

Ne faremo uso tanto nella cosiddetta « rettificazione » delle curve, di cui diremo ora, quanto nella « quadratura » delle superfici, di cui parleremo più avanti.

Per approfondire ancora le nostre nozioni in proposito, consideriamo il cosiddetto « triangolo caratteristico » di Leibnitz. Questo scienziato aveva trovato nelle carte di Biagio Pascal un disegno che serviva a scopi affatto diversi (e precisamente allo studio della funzione sinusoidale). Questo disegno fu per Leibnitz come una fiaccola che gli chiarì quello che gli era ancora oscuro e lo guidò alla scoperta del Calcolo differenziale. Per non confonderci, tracciamo un po' diversamente, ma senza nulla mutare nelle parte sostanziali, quel « triangulum characteristicum » di Pascal e di Leibnitz.

Tracciamo una qualunque tangente ad una curva in un suo punto A. A destra ed a sinistra di A segniamo sulla tangente due punti B e C equidistanti da A. Semplici considerazioni geometriche ci convincono che il

triangolo rettangolo tratteggiato costruito sulla B C come ipotenusa, è simile al triangolo rettangolo a tratto pesante che ha il suo vertice in A. Infatti l'ipotenusa del secondo triangolo è perpendicolare a quella del primo, il cateto di maggior lunghezza nell'uno è perpendicolare a quello corrispondente dell'altro, perciò l'angolo in A del secondo sarà eguale all'angolo nel vertice B del primo. Per conseguenza anche gli angoli nell'altro vertice (che sono i complementi a 90° degli angoli ora considerati) saranno pure rispettivamente eguali. Due triangoli che hanno eguali i tre angoli si dicono appunto simili fra di loro.

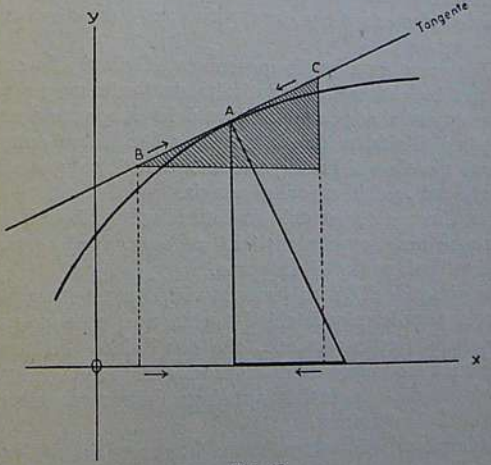


Fig. 45

Ora facciamo scorrere in modo continuo e regolare i due punti B e C lungo la tangente e verso A: con ciò il nostro triangolo tratteggiato andrà continuamente rimpicciolendo senza nulla modificare alle proporzioni re-

lative dei lati: proseguiamo finchè i due punti B e C vengano a confondersi in A. Sappiamo dall'esempio già fatto del rettangolo evanescente (vedi a pag. 54) che le proporzioni dei lati si mantengono anche quando il triangolo si riduca, al limite, ad un punto.

Tenendo ben presente questo fatto, noi riusciamo ad avere in mano quella meraviglia delle meraviglie: un *differenziale*. Nel punto A esiste ancora sempre il nostro triangolo ultra-ultramicroscopico ed esso è ancora sempre simile al triangolo a forti tratti che ha vertice in A. L'ipotenusa di questo triangolino infinitesimo si confonde con un tratto infinitesimo della curva nel punto A.

Ammettiamo che questo doppio aspetto del nostro tratto infinitesimo che ora è curvo ora è retto, sa un po' di magia (1).

Per avere un esempio grossolano, si pensi alla catena di una bicicletta che è costituita da tante maglie rettilinee eppure si adagia sulla curva delle due ruote dentate: si pensi di ridurre queste maglie a lunghezze estremamente piccole e si finirà per confondere il poligono delle maglie col cerchio su cui si adagia.

Rettilineo e curvo sono due attributi antitetici, come bianco e nero, eppure visti in un certo modo possono fondersi nel punto di trapasso.

Le piramidi d'Egitto viste da vicino sono ammassi di blocchi parallelepipedi che i turisti non possono superare, nella loro ascensione, che con l'aiuto dei ragazzi egiziani: viste invece dall'alto di un aeroplano, gli spigoli così frastagliati in realtà, appaiono delle rette perfette: effetto di lontananza.

Vediamo un effetto contrario: la superficie dell'acqua in uno stagno è per noi il simbolo del piano perfetto e la linea dell'orizzonte del mare visto da bordo di una

(1) Ma non è affatto considerato come tale dai nostri matematici: i quali anche nella realtà fisica incontrano oramai di questi enigmi (vedi il doppio aspetto dell'elettrone che ora è particella, ora è onda). N. d. Tr.

nave appare come una retta; guardata invece da un velivolo a 5 o 6000 metri d'altezza appare curva.

Non c'è dunque nulla di illogico, di assurdo, di pensare un tratto di curva infinitamente breve come un segmento di retta. Questa è la verità che importa avere presente.

Dunque, nel caso ideale di un triangolino infinitesimo che si riduca nel punto A abbiamo sempre la similarità col triangolo tracciato in linee pesanti nel nostro disegno: noi chiameremo i suoi tre lati i « differenziali » dei lati del triangolo caratteristico, indicheremo con *dx* il suo cateto parallelo all'asse delle ascisse, *dy* il suo cateto parallelo all'asse delle ordinate e diremo *ds* l'ipotenusa che potremo considerare tanto come un differenziale dell'ipotenusa (cioè di un segmento di retta) quanto come differenziale di un tratto di curva.

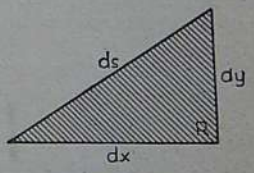


Fig. 46

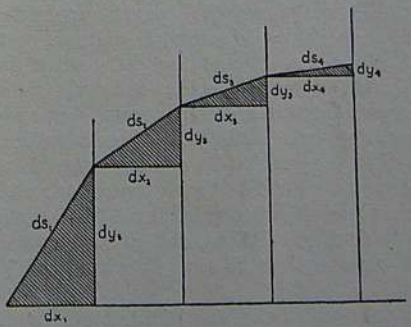


Fig. 47

Quel che abbiamo fatto nel punto A lo potremmo ripetere per un altro punto qualunque della curva, che potremo considerare composta da tanti *ds* consecutivi, cioè di tanti « elementi di curva » che si susseguono come le perline di una collana e possiamo anche, con l'immaginazione, figurarci queste perline come tanti triangolini caratteristici. Ingrandendo enormemente questi triangolini, avremmo qualcosa come indicato nella figura 47.

Noi finiremmo tuttavia per perdere l'esatto senso dell'analisi se rimanessimo troppo attaccati alla materialità di questa collana di triangoli caratteristici. Dobbiamo, fra l'altro, tener sempre presente che i dx_1 dx_2 dx_3... sono tanto enormemente piccoli che possiamo considerarli tutti eguali, ma che i corrispondenti dy_1, dy_2, dy_3... e quindi le ds_1, ds_2, ds_3... non sono qualunque ma sono legati ai rispettivi dx dalla relazione $y = f(x)$, che esprime l'equazione della curva data. Ricordare *sempre*, che anche la riduzione all'infinitamente piccolo, al « differenziale » non altera i rapporti.

Ora per tornare ad esempi materiali: ogni curva può concepirsi come la successione degli infiniti tratti delle tangenti nei suoi successivi punti: appoggiando sul foglio di carta sul quale scrivo, la culla di carta assorbente faccio venire a contatto della carta successive porzioni della sua curvatura che si inseriscono successivamente nei tratti piani della carta del mio scritto. Posso fare l'opposto: capovolgere la mia culla ed applicare in punti successivi della sua curvatura la mia riga. Allora circoscriverò alla curva tante tangenti.

E così, passo passo, siamo giunti alla soglia di un colletto fra le roccie a picco, dal quale si schiude ad un tratto il panorama dell'intero algoritmo dell'alta matematica.

Anzitutto quello della « Rettificazione »: intendo con questa parola la misura della lunghezza di una curva.

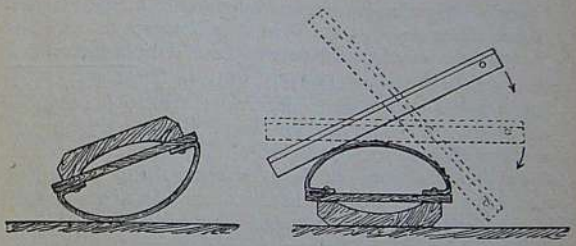


Fig. 48

Poichè noi misuriamo con strumenti rettilinei dobbiamo rettificare (rectam facere) la nostra curva.

Di massima la cosa non è difficile: una volta si credeva che la lunghezza di una curva non potesse esprimersi che con un numero irrazionale (come la circonferenza del circolo a mezzo del suo raggio).

Ma noi abbiamo già mostrato come la irrazionalità è qualcosa di relativo.

Per le curve non è affatto necessario che sussista questa irrazionalità nell'espressione della loro lunghezza. Io posso piegare un filo di ferro sul tavolo secondo una curva qualunque. Ma questo sia osservato solo di passata.

Per tornare alla nostra rettificazione: ogni curva, abbiamo detto è come una collana di infiniti ds: ora ogni ds, per il teorema di Pitagora si può esprimere con $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ o meglio con $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. E questo sta bene. Manca però una cosuccia: come formare la somma di tutti questi ds? Qui inciampiamo in un comando analogo ad un integrale, e che non sappiamo ancora eseguire. Ci serve a poco di supporre che la lunghezza della curva sia compresa fra i limiti a e b e che essa sia eguale all'integrale fra a e b di tutte le $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Noi non sappiamo ancora risolvere

questo integrale che esprime appunto la lunghezza dell'arco di curva fra a e b, ma anche non conosciamo l'equazione $y = f(x)$ della curva che ci darà la chiave della nostra integrazione. Quindi lo scrivere $\int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ equivale ad esprimere la domanda: quanto è lunga la curva fra a e b e questo non basta. Bisogna aggiungere un'altra espressione: quella che ci dà y in funzione di x. Sappiamo che cosa va fatto e conosciamo anche, di vista, quel bel simbolo misterioso che deve procurarci la soluzione; il segno d'integrale, ma rimaniamo impotenti, inchiodati come in un incubo, davanti al nostro problema. Sudiamo freddo, ci agitiamo, finchè ci svegliamo dal nostro brutto sogno. Il risveglio liberatore ci permetterà di seguire a mente riposata quel che andremo esponendo nel prossimo capitolo e che ci darà al soluzione.

Capitolo XXV

RELAZIONI FRA LA DERIVATA E L'OPERATORE INTEGRALE

Abbiamo già avuto occasione di mostrare come, quando sia data una funzione $y = f(x)$ quello che c'interessa non è tanto i differenziali delle singole incognite, quanto il loro rapporto $\frac{dy}{dx}$: abbiamo ricavata la derivata della funzione in due esempi specifici ed il lettore può crederci su parola quando gli diciamo che qualsiasi funzione ammette, attraverso calcoli più o meno complicati, una derivata (1).

Il calcolo differenziale nella sua forma particolare di calcolo delle derivate, le cui regole fondamentali impa-

(1) Naturalmente quando essa non abbia proprietà tali che rendano impossibile una differenziazione.

reremo tosto a conoscere, è una operazione di calcolo che si può condurre con eguale rigore e sicurezza di una moltiplicazione, per dirne una. Se siffatte operazioni sieno del tipo tetico o litico è ancora oggetto di discussione: ad ogni modo presentano le caratteristiche di entrambe. Ma non staremo a romperci la testa per questa classificazione e cercheremo piuttosto di vedere se il calcolo differenziale non ci offra la chiave per renderci padroni del calcolo integrale.

Perciò lasceremo per un momento la geometria e tratteremo la questione dal punto di vista puramente formale ed aritmetico. Ci siamo già riusciti una volta a proposito dei numeri immaginari, quando con l'aiuto di una equazione siamo pervenuti a risolvere un enigma apparentemente insolubile, snocciolando il significato del simbolo i quale operatore o fattore di rotazione di 90°.

Nelle quadrature noi avevamo ricevuto il comando nella forma: Area $= \int y dx$ ed $\int f(x)dx$: in entrambi detti comandi, figura tanto la funzione della curva (una volta come ordinata y ed una volta come funzione di x) quanto il differenziale dx.

Il primo quesito che dobbiamo esaminare è di sapere se questo dx deriva dalla funzione f (x): questo non è evidentemente il caso, perchè finora non conosciamo che la funzione:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Un dx non può appartenere alla funzione originaria, bensì al coefficiente differenziale o derivata della funzione cioè alla funzione che scriviamo f'(x) oppure y'. Allora serviamoci di quell'artifizio di cui si servì il Leibnitz in quello storico 29 ottobre 1676: consideriamo l'integrale come se sotto il segno d'integrale non ci sia la funzione originaria, sibbene la sua derivata. In realtà nulla è stato variato: ha solo mutato la grande cabala

della nostra concezione d'integrale. Se per es. la curva di cui si cerca la quadratura avesse per equazione $y = x^2$, questa rimane inalterata. Noi non facciamo altro che affermare che esiste un'altra funzione, la funzione originaria, di cui questa nostra funzione $y = x^2$ è la derivata.

Vediamo bene che questo nostro modo involuto di pensare costituisce la più grande difficoltà dell'Analisi infinitesimale, ma quando si sia compreso questo artifizio, tutto il resto è facile ed è quistione di calcolo più o meno meccanico. Malgrado la difficoltà non ci fermeremo a rammaricarcene e procederemo oltre. Ammettiamo senz'altro di avere una derivata: $\frac{dy}{dx} = f'(x) = y'$ dinanzi a noi.

Dal punto di vista aritmetico questa è una equazione come ogni altra, che si può trattare in via puramente formale come tutte le altre, secondo le note regole. Possiamo per es. moltiplicarne entrambi i membri per dx ottenendo:

$$\frac{dy}{dx}\,dx = f'(x)\cdot dx = y'\cdot dx$$

ossia

$$dy = f'(x)dx = y'dx$$

e poichè non turbiamo l'equilibrio della nostra equazione quando facciamo su di entrambi i membri di essa la stessa operazione, applichiamo qui il comando d'integrale e avremo:

$$\int dy = \int f'(x)dx = \int y'dx.$$

Con nostra sorpresa ci troviamo sulle traccie di una proprietà importantissima dell'integrazione: che ci appare come la operazione inversa della derivazione. Chè se io cancello tutti i segni integrali (al punto in cui siamo non potremmo esprimerci altrimenti che dicendo: disintegriamo le ultime espressioni) noi troveremmo di nuovo:

$$dy = f'(x)dx = y'dx$$

e dividendo per dx troveremo:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)\frac{dx}{dx} = y'\frac{dx}{dx} = f'(x) = y'$$

e cioè la derivata di partenza. Quindi, per il momento, non abbiamo da preoccuparci di quel che può significare $\int dy$: lo considereremo, come il Cavalieri, la somma di tutti i dy, di tutti gli infiniti incrementi infinitesimali di y entro i limiti considerati della nostra curva, cioè di quel tratto di curva che s'è differenziato per avere $f'(x)$ o y': cioè di quella curva incognita che l'integrale $\int dy$ ci presenta come curva originaria dall'equazione $y = F(x)$. In altre parole l' $\int dy$ non è altro che y o $F(x)$. Ciò si esprime scrivendo:

$$F(x) = y = \int y'dx = \int f'(x)dx.$$

In questo modo il problema del calcolo integrale resta « impostato » ed a parole diremo che: se abbiamo da integrare una qualsiasi funzione, il risultato della integrazione sarà il valore di una funzione originale la cui derivata è la funzione sotto il segno d'integrazione. Questa funzione è diversa dalla originaria sebbene entrambe sieno funzioni di x e questa diversità si rivela per il fatto che per una abbiamo scritto $F(x)$ o y, per l'altra $f(x)$ oppure y'.

Ora che sappiamo che cosa significa un integrale esaminiamo ancora una quistione ad esso relativa: Perchè nella quadratura abbiamo messo dei limiti all'integrazione, mentre qui non poniamo limiti? La risposta non è tanto facile: diremo che ci sono due specie d'integrali: gli *integrali definiti* e gli *integrali indefiniti*; i primi si riferiscono ad una somma eseguita entro determinati limiti che ci prefiggiamo, mentre per i secondi questi limiti non sono determinati. In via provvisoria

consideriamoli gli uni come numeri concreti od operazioni che portano ad un risultato concreto, i secondi come numeri generici od un simbolo di operazione generica (come una formola algebrica contenente solo lettere ed indicante una certa operazione che va eseguita N. d. Tr.). Trovato l'integrale indefinito o generale si può sempre rendere l'operazione d'integrazione concreta stabilendo i limiti. Lo vedremo tosto in qualche caso specifico.

Dobbiamo prima considerare il calcolo differenziale per aver modo di poter realmente calcolare gli integrali, o se vogliamo, per poterli sfruttare. In queste nostre considerazioni, contrariamente all'uso, tratteremo dei due modi di calcolo ad un tempo. Per prepararci a quest'ultima arrampicata abbiamo però da superare due gendarmi o spuntoni di roccia: l'analisi dei diversi ordini di piccolezza ed il cosidetto teorema del binomio di Newton.

Capitolo XXVI

DELLE TRE SPECIE DI NULLA

Anzitutto vediamo i diversi « ordini di piccolezza »: noi abbiamo già accennato che, in via puramente formale, l'analisi infinitesimale considera il piccolo, il piccolissimo e l'ultra piccolissimo che in essa ha una grande parte. Noi abbiamo già affermato e spiegato aritmeticamente, per mezzo di frazioni, che $(dx)^2$ può venire trascurato di fronte ad un dx, perchè rispetto ad esso l'x si comporta come l'universo rispetto alla terra e il dx sta al $(dx)^2$ come la Terra ad un granello di polvere. Se dunque io considero su di un disegno od in un calcolo, l'intera Terra come un punto piccolissimo, allora si ca-

pisce che un granello di polvere è, al confronto, interamente trascurabile.

Non nascondo che contro questo modo di vedere si possono sollevare molte obbiezioni. Si ammette che praticamente il ragionamento corre, ma che questo trascurare un granello di polvere non sia teoricamente esatto, perchè nemmeno un grano di polvere si può sopprimere dall'universo. Si aggiunge che l'analisi infinitesimale appartiene non alla matematica di precisione ma ad una matematica di approssimazione come del resto tutti i calcoli con numeri irrazionali.

Per quanto sia interessante di discutere sopra i tentativi moderni di superare questa difficoltà, noi dobbiamo passare oltre, e cercare invece di comprendere la possibilità dell'esistenza di diversi ordini di piccolezza, poichè praticamente nei calcoli noi dobbiamo tener conto di tre specie di nulla.

A questo scopo immaginiamoci di avere un parallelepipedo a spigoli ortogonali. Questo solido consista per esempio in un metallo che si dilati col calore. Potremmo considerare questa « dilatazione cubica » come svolgentesi secondo la direzione dei tre spigoli: questo praticamente si avrebbe fissando il nostro parallelepipedo in un angolo della stanza per modo che non possa dilatarsi che nella direzione delle facce libere. Naturalmente questa dilatazione è contemporanea per i tre spigoli. A dilatazione avvenuta, ritagliamo nel parallelepipedo il prisma iniziale lungo le faccie primitive F^1, F^2, F^3, ed esaminiamo i ritagli che ne risultano. Per maggior chiarezza disegnamo questi ritagli a parte nella figura 50: essi sono costituiti di tanti prismetti. P, G^1, G^2, F^2, G^3, F^3, che aggiunti al prisma iniziale F, ci danno il parallele-

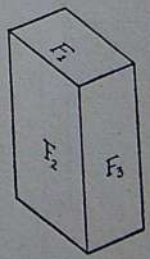


Fig. 49

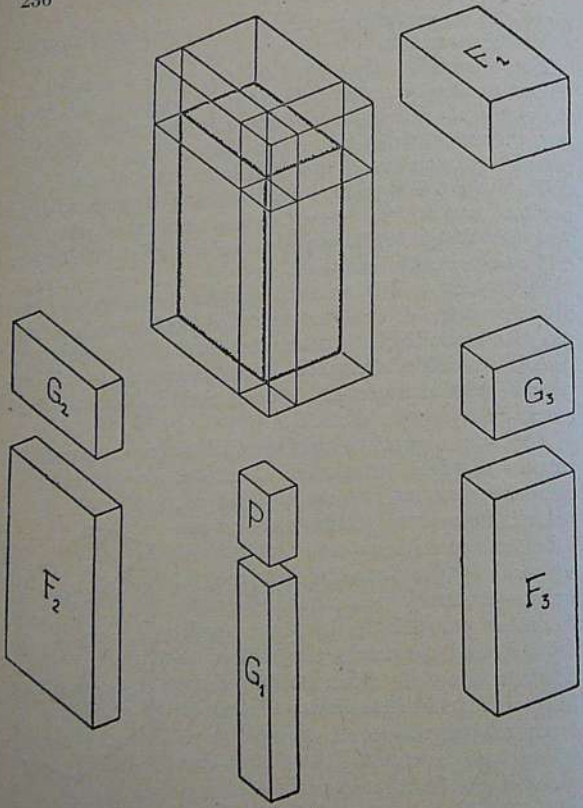


Fig. 50

pipedo dilatato. Ora è chiaro che col diminuire della temperatura fino al valore iniziale, il nostro parallelepipedo si contrae e riprende le dimensioni di origine;

scompaiono cioè tutti i prismetti dianzi considerati; i quali si riducono a zero. Prima tuttavia che questi prismetti si annullino, essi conservano una grandezza propria che va diminuendo progressivamente fino al limite zero (lim 0). Questa riduzione progressiva a zero si ha tanto nei volumi che nelle superfici che li limitano, che nelle linee che limitano queste superfici e quindi noi veniamo a trovarci dinanzi all'enigma di tre specie diverse di zero: lo zero limite dei volumi piccolissimi, lo zero limite della estensione delle superfici e lo zero limite della lunghezza delle linee. Questi tre zeri sono di natura diversa o meglio di ordine di grandezza diversa, poichè si riferiscono a grandezze diverse. Noi possiamo « grosso modo » esprimerci in questa maniera: il punto è l'unità di questi zeri se viene considerato al limite zero: una linea è una successione infinita di punti e quindi al limite zero è una grandezza di ordine superiore al punto. Parimenti una superficie, come prodotto di una lunghezza per una larghezza, è una successione infinita di linee, cioè una successione doppiamente infinita di punti, la quale pure tende al limite zero. E così via. La superficie, anche al limite zero, costituisce dunque una grandezza di « ordine superiore » a quella della linea. E così analogamente per il volume: il quale, anche al limite zero, costituisce una grandezza di « ordine superiore » alla superficie. Chiamando infinitesimi queste grandezze al limite zero, noi distingueremo dunque degli infinitesimi di primo, secondo o terzo ordine che scriveremo dx, $(dx)^2$, $(dx)^3$, e potremmo continuare. Ma per noi basta.

Eppoichè siamo arrivati fino a questo punto col nostro sforzo di immaginazione, possiamo ancora fare un passo avanti e considerare un infinitesimo moltiplicato per un'altro come un infinitesimo di ordine superiore al primo, allo stesso modo in cui moltiplicando 1/10 per 1/10 si ottiene 1/100 cioè un numero assai più piccolo.

Si potrebbe naturalmente obbiettare che il trasferimento agli infinitesimi di concetti e di regole che sono valide solamente per grandezze finite non è una operazione lecita, ma possiamo rispondere che noi operiamo non sugli infinitesimi ma su quantità estremamente piccole, che solo al limite diventano infinitesimi. In linea subordinata, quantunque non ci sia possibile nè di vedere nè di rappresentarci in modo concreto questi infinitesimi, noi siamo però in grado di verificare in modo sicuro le affermazioni che su di essi facciamo.

E ora torniamo a qualcosa di più concreto: facendo appello a tutte le conoscenze aritmetiche che abbiamo acquistate, rivolgiamoci allo studio delle serie binomie per le quali esistono le più diverse applicazioni. Noi sceglieremo la elegante rappresentazione combinatoria per avere occasione di chiarire quel coefficiente binomio di cui ci siamo già sovente occupati.

Capitolo XXVII

IL TEOREMA DEL BINOMIO

Fissiamo subito il concetto di *binomio*: abbiamo già visto che per binomio s'intende un numero a due termini di cui uno incognito, come $(a + x)$ o $(a - x)$ ma nel quale la x non figura tanto in qualità d'incognita quanto come termine che si contraddistingue dall'altro – (quasi come una distinzione ottica, come sarebbe a dire un termine bianco ed uno nero) – (1). Bi-nomio, vuol infatti dire che ha due nomi per i due suoi termini: i quali nel loro accoppiamento additivo o sottrattivo vengono considerati come una unità nuova.

(1) Il senso più profondo dell'impiego della x sta in questo, che il teorema del binomio viene continuamente impiegato per sviluppare funzioni nelle quali la variabile x si trova in un espressione binomia.

Io posso moltiplicare per es. $(x + a)$ con $(x + b)$ considerandoli entrambi come « fattori binomi », ottenendo:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab = \\ = x^2 + (a + b)x + ab$$

analogamente:

$$(x + a)(x + b)(x + c) = \\ = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc$$

risultato che il lettore può facilmente verificare. Per mostrare meglio il modo di costruzione di questo sviluppo per un numero qualunque di fattori, serviamoci di una presentazione, già usata dal Leibnitz, e scriviamo:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \begin{matrix} b \\ a \end{matrix} \Big\} x + ab \qquad \text{e}$$

$$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \Big\} x^2 + \begin{matrix} ab \\ ac \\ bc \end{matrix} \Big\} x + abc$$

Già fin da questo punto, un occhio esperto in matematica scorge subito due cose: la prima, che i termini dello sviluppo sono ordinati secondo le potenze decrescenti della x; la seconda, che i « coefficienti » di queste potenze posseggono indubbiamente carattere combinatorio, poichè prima s'incontrano tutte le unità, poi tutti gli ambi, poi i terni degli elementi cogniti $a, b, c \ldots$ E ciò in una « combinazione senza ripetizione ».

Per maggior chiarezza, facciamo un caso più complesso; per es.:

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d)(x + e) =$$

$$= x^5 + \left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix} ab \\ ac \\ ad \\ ae \\ bc \\ bd \\ be \\ cd \\ ce \\ de \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} abc \\ abd \\ abe \\ acd \\ ace \\ ade \\ bcd \\ bce \\ bde \\ cde \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} abcd \\ abce \\ abde \\ acde \\ bcde \end{matrix}\right\} x + abcde$$

Il perchè di questa struttura singolare non è più così enigmatico come appariva a prima vista. La struttura nasce dal fatto semplicissimo che nella moltiplicazione si devono sempre moltiplicare fra di loro tanti singoli termini quanti sono i binomi (in quest'ultimo caso cinque). Lo x^5 non è altro che $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ e l'ax^4 non è che $a \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ e così allo stesso modo $acex^2 = a \cdot c \cdot e \cdot x \cdot x$ e così via. Questo cenno basterà provvisoriamente per convincere il lettore riflessivo della necessità di una relazione combinatoria.

E ora concretiamo in una regola quello che abbiamo imparato fin qui e fissiamo la forma di un prodotto di fattori binomi costituiti tutti da un x e da un'altra grandezza che varia da fattore a fattore.

Anzitutto questo prodotto sarà una serie di termini ordinati secondo le potenze decrescenti della x, a cominciare dalla potenza il cui esponente è eguale al numero dei fattori. Questa serie di potenze decresce di una unità nell'esponente in ogni successivo termine: al di là della x^1 c'è ancora la potenza x^0, cioè un termine con fattori non contenenti la x, cosichè il numero di termini della serie è eguale al numero di fattori più uno.

Scrivendo la serie senza coefficienti (o meglio con coefficienti tutti eguali ad 1, si ha lo sviluppo:

$$x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots x^2 + x^1 + x^0$$

dove n rappresenta il numero di fattori binomi. Oppure introducendo i coefficienti mediante un C con un indice al piede:

$$C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \dots C_{n-2}x^2 + C_{n-1}x^1 + C_n\,x^0$$

Ora si noti che l'indice di cui è affetto ogni singolo coefficiente, accenna alla classe di combinazione degli n elementi. La x^n ha il coefficiente $C^o = 1$ poichè il termine corrispondente non contiene che la x: la x^{n-1} non ha per C, che delle unità, la x^{n-2} che degli ambi, la x^{n-3} che dei terni... degli n elementi. Ora queste combinazioni non sono qui puri scambi di elementi, ma veri prodotti. Si ha qui una associazione di combinazioni con la moltiplicazione.

Ora serviamoci di un artifizio e immaginiamo che i nostri $a, b, c\dots$ sieno tutti eguali fra di loro: $a = b = c = d$ ecc. e allora

$$(x + a)\,(x + a)\,(x + a) \dots (x + a) = (x + a)^n$$

se n sono i fattori. E questo ci porta al nocciolo del cosidetto teorema del binomio di Newton che ha così grande importanza in matematica. Sciogliendo il problema che stiamo studiando, saremo in grado di esprimere (per ora solo operando con esponenti interi e positivi) una qualsiasi potenza di un qualunque binomio sotto forma di una serie di termini a potenze decrescenti fino a zero.

Allora non avrà importanza che io scriva al posto della x una qualsiasi altra lettera. Lasciamo però la x per avere un riferimento con quanto abbiamo detto al principio.

Secondo la regola stabilita qui sopra, avremo dunque

$$(x + a)^n = C_0x^n + C_1x^{n-1} + \dots C_{n-2}x^2 + C_{n-1}x^1 + \\ + C_n\,x^0.$$

Sappiamo già che $C_0 = 1$: che cosa sarà C_1? La som-

ma di tutti i termini presi singolarmente, cioè $\binom{n}{1} a$. E C_2? La somma di tutti gli ambi di a: e poichè in questo caso ogni ambo vale $a \cdot a = a^2$ sarà col simbolo delle combinazioni, $C_2 = \binom{n}{2} a^2$.

Per la terne sarà $a \cdot a \cdot a = a^3$ quindi $C_3 = \binom{n}{3} a^3$ e così via. Così la soluzione del nostro problema verrà espressa da:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} a x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + \ldots . + \binom{n}{n-1} a^{n-1} x + \binom{n}{n} a^n .$$

Prima di passare a calcoli concreti, parliamo ancora del triangolo di Pascal o triangolo dei coefficienti binomi; tabella assai nota che ci permette di determinare molto facilmente i coefficienti C per un numero qualunque n. Eccola:

0					1				
I				1		1			
II			1		2		1		
III		1		3		3		1	
IV	1		4		6		4		1
V	1	5		10		10		5	1
VI	1	6	15		20		15	6	1
VII	1	7	21	35		35	21	7	1

e così via.

Senza inoltrarci nella lunga dimostrazione dell'esattezza di questa tabella, ci basti mostrare come ogni numero della tabella sia formato dalla somma dei due numeri che gli stanno immediatamente sopra, a destra ed a sinistra. Questo ci permetterà di costruire « passo passo » la nostra tabellina, in modo puramente meccanico, fino all'infinito. Quel fanciullo di genio che fu Biagio Pascal trovò da sè questo « triangulus mathematicus » come lo chiamò, ad un'età in cui i ragazzi gene-

ralmente amano fare il chiasso con i compagni e spendere le loro energie in giuochi o bisticci.

Il lettore intelligente avrà capito che i numeri romani a sinistra danno il numero d'ordine del coefficiente n: la prima riga 0 riferendosi all'$n = 0$ e la settima all'$n = 7$.

Facciamo dunque il nostro sviluppo per $n = 7$:

$$(x + a)^7 = x^7 + \binom{7}{1} x^6a + \binom{7}{2} x^5a^2 + \binom{7}{3} x^4a^3 + \binom{7}{4} x^3a^4 + \binom{7}{5} x^3a^5 + \binom{7}{6} x^2a^6 + a^7.$$

Non abbiamo scritto il primo e l'ultimo coefficiente ma per completezza potremmo rappresentarne tutta la serie con

$$\binom{7}{0} \binom{7}{1} \binom{7}{2} \binom{7}{3} \binom{7}{4} \binom{7}{5} \binom{7}{6} \binom{7}{7}$$

cioè

1 7 21 35 35 21 7 1

il che verifica brillantemente il triangolo di Pascal.

E ora alcuni altri esempi del teorema del binomio. Si debba fare: $(4 + 7)^5$. Naturalmente si potrebbe qui semplicemente sommare 4 e 7 in 11 ed elevare alla quinta potenza, ottenendo subito: $11^5 = 161051$. Ma approffitteremo dell'occasione per verificare in altro modo il nostro teorema; il che ci mostrerà che anche dal punto di vista del calcolo pratico la scomposizione di un numero in un binomio può avere la sua utilità (1).

---

(1) A parte l'operazione della quadratura e cubatura dei numeri a memoria: così $13^2 = (10 + 3)^2$ basta aggiungere a $10^2 = 100$ ed a $3^2 = 9$ il doppio del prodotto $10 \times 3 = 30$.

Calcoliamo dunque:

$$(4+7)^5 = \binom{5}{0} 4^5 \cdot 7^0 + \binom{5}{1} 4^4 \cdot 7^1 + \binom{5}{2} 4^3 \cdot 7^2 +$$

$$+ \binom{5}{3} 4^2 \cdot 7^3 + \binom{5}{4} 4^1 \cdot 7^4 + \binom{5}{5} 4^0 \cdot 7^5 =$$

$$= 1 \cdot 1024 \cdot 1 + 5 \cdot 256 \cdot 7 + 10 \cdot 64 \cdot 49 + 10 \cdot 16 \cdot 343 +$$

$$+ 5 \cdot 4 \cdot 2401 + 1 \cdot 1 \cdot 16807 = 1024 + 8960 + 31360 +$$

$$+ 54880 + 48020 + 16807 = 161051$$

come avevamo trovato prima.

Facciamo un secondo esempio:

$$(1+x)^9 = \binom{9}{0} \cdot 1^9 x^0 + \binom{9}{1} 1^8 \cdot x^1 + \binom{9}{2} 1^7 \cdot x^2 +$$

$$+ \binom{9}{3} 1^6 \cdot x^3 + \binom{9}{4} 1^5 \cdot x^4 + \binom{9}{5} 1^4 \cdot x^5 + \binom{9}{6} 1^3 \cdot x^6 +$$

$$+ \binom{9}{7} 1^2 \cdot x^7 + \binom{9}{8} 1^1 \cdot x^8 + \binom{9}{9} 1^0 \cdot x^9 =$$

$$= 1 + 9x + 36x^2 + 84x^3 + 126x^4 + 126x^5 + 84x^6 +$$

$$36x^7 + 9x^8 + x^9.$$

Per finire diciamo ancora che il calcolo vale naturalmente anche per $(x - a)^n$ oppure per $[(-x) - (a)]^n$ facendo debita attenzione ai segni nell'eseguire le potenze: se per es. nello sviluppare $(x - a)^4$ dovessimo stabilire il segno del termine $4x^3a$, ci ricorderemmo che, poichè a porta il segno $-$, sarà $4\,x.x.x\,(-a) = -4\,x^3a$.

Scriviamo ancora il teorema del binomio come sommatoria di termini, avremo:

$$(x+a)^n = \sum_{m=0}^{m=n} \binom{n}{m} x^{n-m} \cdot a^m = \binom{n}{0} x^n \cdot a^0 +$$

$$+ \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot a^1 + \ldots \binom{n}{n} x^0 \cdot a^n .$$

Rimarrebbe da esaminare il caso di potenze n fratte o negative, ma poichè non possediamo ancora sufficienti conoscenze per discutere a fondo questi casi, dobbiamo

accontentarci di affermare che con potenze fratte o negative lo sviluppo binomio si può mettere sotto la forma:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots$$
$$\dots \binom{n}{r}x^5 + \dots$$

nella quale serie r rappresenta un numero finito che può essere anche maggiore di n.

Quando si avesse un'espressione come $(a+x)$ ci converrà metterla sotto la forma qui sopra, scrivendola $a \cdot \left(1+\frac{x}{a}\right)$ e così sarà $(a+x)^n = a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$.

E poichè abbiamo parlato di « serie infinite » è bene che diciamo quel che s'intende per « serie ».

Già il lettore avrà compreso che si tratta di una « teoria », di una filza di termini che è finita quando il loro numero è finito, infinita nel caso contrario. Una serie infinita, l'abbiamo già veduto, porta ad un numero irrazionale, come:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Questa serie particolare ci dà modo di spiegare un nuovo concetto importante. Sappiamo che la somma di questo infinito numero di termini è rappresentata da $\frac{\pi}{4}$ cioè da un numero che, per quanto irrazionale, è concreto.

Una siffatta serie infinita si chiama « convergente » perchè converge, al limite, verso un valore concreto.

Una serie invece come:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots$$

che si estenda all'infinito, dà come somma un numero infinito, inafferrabile: essa si chiama allora « serie divergente » perchè diverge ossia si estende indefinitamente.

La ricerca della convergenza o divergenza di una serie appartiene alla alta matematica e ne rappresenta uno dei problemi più difficili. Non è difatti per nulla sicuro che una serie infinita di termini che vanno scemando di valore sia convergente. Così la serie

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots$$

è, cosa strana, una serie divergente per quanto a prima vista sembri che i termini successivi vadano decrescendo. Questa somma di termini acquista valore infinito, mentre la serie:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$$

è convergente e tende verso il valore 1.

Come abbiamo già veduto per la serie di Leibnitz $\left(\text{di } \frac{\pi}{4}\right)$ una serie infinita è sovente un mezzo per eseguire una quadratura. Effettivamente una qualunque espressione che possa tradursi in una serie può essere messa sotto forma più semplice e calcolabile, specie quando ci si possa fermare, senza troppo grossolana approssimazione, ai suoi primi termini. Ed in matematica, come anche nella tecnica, questo artifizio è molto sovente impiegato. Effettivamente qualunque integrale può risolversi in una serie infinita e questo permette di trovarne sovente la soluzione approssimata. Sappiamo che già Archimede ha condotto dei calcoli con serie a numero infinito di termini allo scopo di fare delle quadrature, che ora noi facciamo in modo più rapido con un integrale e questo va ascritto al merito di quella mente lucida e sublime di geometra che è riuscita a risolvere problemi di alta matematica pur mancando degli strumenti perfettissimi di cui ora disponiamo.

Capitolo XXVIII

LA QUADRATURA DELLA PARABOLA

Al grande geometra siciliano Archimede va il merito di aver ideato metodi geniali per la quadratura di superfici limitate da linee curve, metodi che vennero usati fino alla fine del secolo decimo settimo. Val la pena di approfondirci alquanto in alcuni di questi: per quanto apparentemente prolissi e complicati essi sono ricchi di concetti e di insegnamenti. Sceglieremo come esempio la quadratura della « parabola comune » che fu mostrata per la prima volta da Archimede nel suo scritto sull'equilibrio della superficie II[a]. Ci occuperemo unicamente della parte geometrica lasciando da parte i metodi statici complicati con i quali egli conforta la sua dimostrazione. Il metodo usato da Archimede è quello che più tardi venne chiamato di « esaustione », che consiste in sostanza ad inscrivere nelle curve, delle spezzate regolari diminuendone progressivamente i lati fino a che queste spezzate vengono a sposare l'andamento della curva. Questo implica l'operazione di sommare le aree di un numero infinito di figure geometriche limitate dalla spezzata per ricavare l'area della superficie ricercata. Come questo possa farsi lo vedremo più tardi. Limitiamoci qui provvisoriamente a tracciare un arco di parabola le cui proprietà erano note ad Archimede, che se è vera la leggenda, gli servirono per costruire gli « specchi ustorii » con i quali si dice che abbia dato fuoco alle navi romane che assediavano la sua patria.

Proponiamoci dunque di calcolare l'area della superfice di un segmento di parabola compreso tra l'asse principale della parabola stessa, la curva ed una verticale qualunque innalzata sull'asse. Incominciamo ad

inscrivere in questa superficie un triangolo il cui vertice verrà a cadere nel vertice stesso della parabola: questo triangolo è rettangolo e la sua ipotenusa parte dal vertice della parabola e va al punto di intersezione con la curva parabolica della verticale all'asse; ne costituisce cioè una corda.

E ora procediamo all'esaustione: su questa ipotenusa o corda che sia, come base, costruiamo un triangolo non più rettangolo, con vertice sulla curva (tratteggiato in figura), di cui due lati saranno nuove corde della parabola: su queste costruiamo due altri triangoli, sempre con vertice sulla curva e che ora rappresentiamo in nero sul disegno. Inutile di procedere in questa costruzione, che possiamo immaginare continuata indefinitamente. Finiremo per avere un grande numero di triangoli sempre più piccoli la somma delle cui aree ci darà con quella del primo triangolo, l'area cercata del segmento parabolico. Ma come fare questa somma di aree? Qui appare in tutta la sua magnificenza il genio matematico degli antichi greci ed a ragione ci meravigliamo ora della incredibile chiarezza e semplicità con la quale questo problema, apparentemente insolubile, è stato risolto. Archimede si disse che una somma infinita di termini non poteva essere costituita che da una serie decrescente di termini che stessero in un rapporto razionale gli uni con gli altri: egli sapeva che la somma di una serie come

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

fornisce un numero tondo, razionale quando si supponga infinito il numero dei termini e cioè dà come risultato $2\cdot\pi$. Se dunque si riesce di trovare un rapporto costante di diminuzione fra i nostri triangoli, che vanno diventando sempre più piccoli, si può ridurre il nostro problema a quello della somma di una serie infinita di termini.

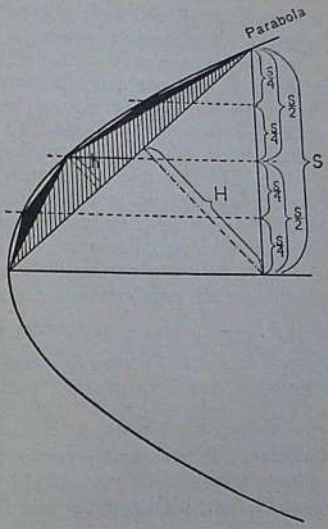


Fig. 51

Qualunque sieno le dimensioni del primo grande triangolo, possiamo considerarlo come l'unità e possiamo esprimere la superficie di tutti gli altri triangoli successivi come frazioni di questa unità. Eseguita la somma degli infiniti termini, basta moltiplicarla per l'area del primo triangolo per ottenere l'area del segmento di parabola. Archimede ci è effettivamente riuscito: è interessante di mostrare, se pure in forma semplificata, il processo dei suoi ragionamenti. Per questo ci gioverà assai l'esame della figura 51.

Premettiamo che la parabola è una curva che ha proprietà curiosissime il cui esame ci porterebbe oltre i limiti che ci siamo imposti. Diciamo solo qui che tutte

le parallele orizzontali all'asse della parabola, segnate a tratti nel disegno, si chiamano « diametri della parabola »: ciascun diametro taglia la corda dell'arco di parabola che sottende, in due parti uguali e incontra l'arco stesso in un punto che si chiama « vertice » dell'arco. Così (figura 52) S_1 è il vertice del segmento di parabola SS', sotteso dalla corda SS', S_2 è il vertice del segmento compreso S ed S_1, S_3 è il vertice del segmento di corda $S\,S_2$ e così via. Aggiungiamo qui che già gli antichi greci e naturalmente anche Archimede, sapevano che il segmento b di un diametro, compreso tra il vertice ed una corda, sta in un rapporto quadratico con l'altezza h dell'estremo dell'arco di parabola sul diametro considerato. Così $(h)^2 : \left(\frac{h}{4}\right)^2 = b : \frac{b}{4}$. Questa è una proprietà della parabola che nel nostro linguaggio analitico moderno esprimiamo con l'equazione

$$y^2 = x \quad .$$

Ed ora spieghiamo il problema avendo presente la figura 52: il grande triangolo ha per cateti b ed h e per ipotenusa la corda SS'. L'area della sua superficie è quindi $\frac{1}{2}$ bh. Tracciamo ora per il punto $\frac{1}{2}h$ un diametro determinando così un nuovo vertice S_1 dell'arco di parabola $S_1\,S'$. Il triangolo iscritto in questo nuovo segmento di parabola può essere considerato come la somma di due triangoli determinati dal segmento $b/4$, come base comune, e dall'altezza rappresentata da $\frac{1}{2}$ h : la loro area complessiva sarà dunque $\frac{1}{2}\,2\left(\frac{b}{4}\cdot\frac{h}{2}\right)$.

Questo vuol dire che il triangolo $S_1\,S'$ ha per area $\frac{b\cdot h}{8}$. Nel linguaggio della figura precedente si potrebbe dire anche, che il primo grande triangolo ha un'area 4 volte più grande di quello tratteggiato. Tracciamo ora due altri diametri in corrispondenza di S_2 e di S'_2 cioè

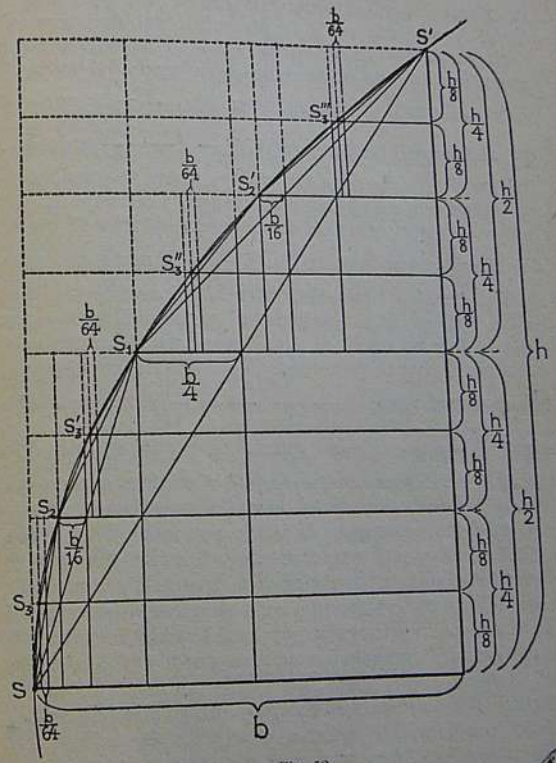


Fig. 52

tagliamo di nuovo $\frac{1}{2}$ h per metà. I diametri passanti per i punti di divisione, determinano sull'arco di parabola due nuovi vertici S^2 ed S'^2. E poichè ora possiamo

inscrivere due nuovi triangoli SS_1S_2 ed $S_1S'S'_2$, che nella figura precedente sono rappresentati dai due triangoli neri, possiamo continuare su questi l'operazione come sopra: veniamo ad ottenere in questo modo due triangoli divisi in parti uguali dal segmento $\frac{b}{16}$: ciascuno di questi triangoli ha per superficie $\frac{1}{2}\left(\frac{b}{16}\cdot\frac{h}{4}\right)$ ossia $\frac{bh}{32}$. Questo ci dice che i nostri quattro nuovi triangoli, rappresentati per coppie nei due triangoli neri della fig. 51, hanno un'area complessiva che è un quarto di quella del triangolo tratteggiato che è $\frac{bh}{8}$. Rimangono, nella fig. 51, quattro triangolini bianchi, di vertici (fig. 52) S_3, S'_3, S''_3, ed S'''_3. Ciascuno di questi è diviso a sua volta in due triangoli, di eguale area, dal diametro passante per il rispettivo vertice. Calcolandone, come sopra, l'area complessiva: $8.\frac{1}{2}\left(\frac{b}{64}\cdot\frac{h}{8}\right)=\frac{bh}{128}$, vediamo che questa è a sua volta un quarto di quella $\frac{b\,h}{32}$ dei due triangoli neri. Non occorre andare avanti: possiamo già vedere la conclusione della nostra « esaustione », condizionata dalla successiva divisione per metà dell'altezza h, dal conseguente tracciamento di nuovi diametri e costruzione sulle nuove corde di triangoli sempre più piccoli. Essa ci fornisce una serie di termini decrescenti che possiamo esprimere a parole nel modo seguente: il primo grande triangolo ha un'area quattro volte quella del triangolo tratteggiato; questo ha un'area quadrupla di quella dei due triangoli in nero; questi, alla loro volta, hanno, presi insieme, un'area quadrupla di quella degli otto triangolini bianchi e così via, fino ad esaustione completa, cioè fino ad aver riempito di triangoli sempre più piccoli lo spazio rimanente fra i precedenti e la curva.

Prendendo dunque come unità l'area del primo triangolo la nostra serie decrescente si può scrivere:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots$$

in cui ogni termine è la quarta parte del precedente. Sarà dunque:

Area-segmento di parabola = area primo triangolo moltiplicata per $\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right)$.

Non rimane che da trovare il valore finito di questa serie: senza stare a fare il calcolo, diciamo che il suo valore è $\frac{4}{3}$ (1), quindi:

Area segmento di parabola $= \frac{1}{2}\,bh \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}bh$

cioè l'area cercata è i due terzi di quella di un rettangolo costruito su b e h come lati.

Prima di lasciare questa nostra scorribanda nella luminosa e tersa campagna della classica geometria delle proporzioni della Grecia antica, facciamo ancora osservare che non è affatto necessario che il primo triangolo risulti rettangolo. Noi siamo partiti da questo per semplificare le cose, ma come lo mostra il procedimento stesso da noi usato, avremmo potuto partire per determinare l'area del segmento di parabola compreso tra la curva e la prima corda obliqua da quello a tratteggio della fig. 51. (2)

---

(1) La formola come vedremo più avanti, è $S_\infty = \frac{a}{1-q}$ dove a è il primo termine della serie, cioè 1 e q è il quoziente della divisione di un termine per il successivo $\left(q = \frac{1}{4}\right)$; quindi

$$S_\infty = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

(2) Noi avremmo allora trovato che l'arco di parabola sotteso tra due vertici opposti di un parallelogramma obliquo lo divide nel rapporto di $\frac{2}{3}$ ad $\frac{1}{3}$ e che tutti gli ulteriori triangoli di esaustione presi complessivamente sono sempre $\frac{1}{3}$ più grandi del triangolo di partenza la cui base è contituita dalla corda dell'arco di parabola e la cui altezza è quella del segmento di partenza.

Capitolo XXIX

SERIE

Riprendiamo l'argomento delle serie di numeri interi, premettendo una breve spiegazione di un'altra distinzione fra le serie.

Vi sono serie che crescono per addizioni o decrescono per sottrazioni consecutive. Per es.:

$$1 \pm 3 \pm 5 \pm 7 \pm 9 \pm \ldots \quad \text{oppure}$$
$$500 \pm 496 \pm 492 \pm 488 \pm \ldots$$

la prima cresce di 2 in ogni successivo termine, la seconda cresce per 4 unità: siffatte serie si dicono «*aritmetiche*». Quando invece le serie hanno i termini che crescono per successive moltiplicazioni, per un fattore costante (che se è rappresentato da una frazione pura o da un numero reciproco diventa una divisione) si dice che si ha una serie *geometrica*. Come per es.:

$$1 \pm 3 \pm 9 \pm 27 \pm 81 \pm \ldots \quad \text{oppure}$$
$$1 \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{16} \pm \frac{1}{64} \pm \frac{1}{256} \pm \ldots$$

In generale sarà:

$$a \pm (a + d) \pm (a + 2d) \pm (a + 3d) \pm \ldots \quad \text{oppure}$$
$$a \pm (a - d) \pm (a - 2d) \pm (a - 3d) \pm \ldots$$

la struttura di una serie aritmetica, mentre quella di una serie geometrica sarà rappresentata da:

$$a \pm aq \pm aq^2 \pm aq^3 \pm aq^4 \pm \ldots \pm aq^{n-1} \quad \text{oppure da}$$
$$a \pm a\frac{1}{q} \pm a\frac{1}{q^3} \pm a\frac{1}{q^3} \pm a\frac{1}{q^4} \pm \ldots \pm a\frac{1}{q^{n-1}}.$$

Rinunciamo di ricavarle e ci accontentiamo di ricordare che siffatte serie si chiamano anche « *progressioni* » e che a (che naturalmente può anche essere 1) si chiama il « termine iniziale ».

Nelle progressioni aritmetiche il numero d che determina l'aumento o la diminuzione si chiama la « differenza », mentre nelle progressioni geometriche il fattore costante q od $\frac{1}{mq}$ si chiama il « quoziente ».

Quel che c'interessa in siffatte serie è la somma di un determinato numero n di termini.

Per la serie aritmetica la formola della somma dei primi n termini, cioè Sn, si scrive:

$$S_n = \left[a_1 - \frac{d\,(1-n)}{2}\right].n$$

dove a_1 è il termine iniziale e d la differenza.

Non si danno somme di infiniti termini nelle progressioni aritmetiche, perchè ogni serie aritmetica è divergente ed ha per somma l'infinito. Quindi se si vuole un risultato che abbia un senso, il numero n di termini considerato deve essere finito.

Calcoliamo per es. la somma dei primi nove numeri interi pari, cioè di:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 = ?$$

Sarà qui $a_1 = 2$ $n = 9$ $d = 2$, quindi la nostra formola qui sopra darà:

$$S_q = \left[2 - \frac{2\,(1-9)}{2}\right].9 = [2 - (-8)]\cdot 9 = 90$$

la cui esattezza si può facilmente verificare.

Per la progressione geometrica, la formola della somma è:

$$S_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}\cdot a_1.$$

Volendo la somma dei primi sei termini della progressione:

$$3 + 15 + 75 + 375 + 1875 + 9375$$

faremo $a_1 = 3 \quad q = 5 \quad n = 6$ che, messi nella formola, danno:

$$S_6 = \frac{5^6 - 1}{5 - 1} \cdot 3 = \frac{15625 - 1}{4} \cdot 3 = 3906 \cdot 3 = 11 \cdot 718$$

ciò che possiamo facilmente verificare sommando i sei primi termini della serie data.

Esaminiamo ora una progressione il cui « quoziente » sia un numero fratto e che si può esprimere simbolicamente con una sommatoria:

$$\sum_{m=0}^{m=n-1} a \frac{1}{q^m} = a + a\frac{1}{q} + a\frac{1}{q^2} + a\frac{1}{q^3} + \ldots + a\frac{1}{q^{n-1}}$$

Siffatte serie hanno una enorme importanza in matematica, perchè sono « convergenti » (1).

Proponiamoci di ricercare qual'è il valore limite verso il quale esse convergono.

Per la serie ora scritta questo valore per $n = \infty$ si ottiene con la formola $S_\infty = \frac{a}{1-q}$ dove qui, per semplicità si è scritto q per $\frac{1}{q}$.

Avremo cioè

$$S_\infty = \frac{a}{1-q} \text{ a condizione che } |q| < 1$$

cioè sia una frazione vera.

Con questa formola potremo trovare il valore di quella serie che ha servito ad Archimede per calcolare l'area del segmento di parabola: la quale, come si ricorda, si scrive:

(1) Cioè la somma degli infiniti termini è una quantità determinata e finita.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

Qui $a_1 = 1$, il quoziente q è $\frac{1}{4}$ e la formola qui sopra ci dice che la serie converge verso il valore:

$$S_\infty = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Se invece avessimo la serie, anch'essa già a noi nota:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

vediamo subito che essa converge verso un valore

$$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Un'altra serie:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$$

Converge invece verso il valore

$$S_\infty = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

In generale, coll'impiego della formola ora adoperata si può affermare che sotto la condizione che $|x| < 1$ qualsiasi serie della forma:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

converge verso il valore $\frac{1}{1-x}$ ciò che è di una importanza notevole.

Da questi pochi esempi riusciamo a capacitarci che nel calcolo di somme degli infiniti termini di una qua-

lunque serie convergente è implicito un principio infinitesimale che ci permette di risolvere – come abbiamo visto nel caso dell'area della parabola -- ogni sorta di problemi geometrici (1).

Se una serie convergente dà per somma un numero intero o fratto finito, si può per converso sviluppare un numero intero o fratto in serie convergente; così:

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$$

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$$

Quest'ultima Serie si può scrivere anche:

$$\frac{3}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots \text{ di quoziente } q = \frac{1}{10}$$

oppure $3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + \dots$
che esprime precisamente la frazione decimale 0,3333... la quale è quindi suscettibile di uno sviluppo in serie convergente.

I numeri interi nel sistema decimale si possono analogamente esprimere con serie delle potenze crescenti del 10 come abbiamo visto a suo tempo, ma queste serie sono finite e l'analogia è tutta formale.

---

(1) Difatti se una funzione f(x) si può sviluppare in una serie convergente, cioè se $y = f(x) = a^o + a^1x + a^2x^2 + \dots$ si ha che

$$\int f(x)dx = A + a^o x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^2 + \frac{a_3}{4}x^2 + \dots$$

cioè è la somma degli infiniti y o termini del tipo $\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ (N. d. Tr.).

Capitolo XXX

TECNICA DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

Ora che abbiamo investigato coscienziosamente i fondamenti dell'Arte nostra, siamo in grado di dedurre, in via puramente formale, l'algoritmo della Matematica Superiore.

Per il calcolo differenziale ci baseremo sulla cosidetta equazione di Leibnitz che esprime la derivata di una funzione rispetto alla variabile indipendente, cioè il rapporto dell'incremento di essa all'incremento della variabile quando questo sia considerato estremamente piccolo, al limite zero della sua piccolezza.

Leibnitz pone dunque:

$$\text{Derivata di y rispetto ad x} = \frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$$

$$= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}.$$

In sostanza questa equazione non è che uno dei modi di esprimere una cosa che avevamo già a suo tempo studiata. Avevamo già cercato di differenziare la funzione f (x) data, cioè di sottrarla dal valore che essa assumeva quando si dava un incremento dx alla variabile, per modo da farla aumentare di una quantità dy corrispondente, estremamente piccola.

Si era già scritto:

$$\begin{array}{rl} & y + dy = f(x + dx) \\ \text{meno} & \underline{-y = -fx} \\ & dy = f(x + dx) - f(x) \end{array}$$

Ora la derivata $\frac{dy}{dx}$ si ottiene appunto dividendo per dx, incremento dato alla variabile, entrambi i membri di questa espressione.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}.$$

Questa equazione di Leibnitz non fa che indicarci il modo di ricavare la $f'(x)$: essa è, a dire il vero, solo l'aspetto esterno del frutto che stiamo cogliendo dall'albero del sapere. Dobbiamo ora togliergli la buccia e ricavarne la polpa: dalla struttura formale derivare una regola pratica di calcolo, il modo di eseguire la derivata di una funzione anche complicata.

Cerchiamo anzitutto di trovare una legge generale per la derivazione di una espressione in cui la variabile x figura ad una data potenza e cominciamo dal caso più semplice della potenza 1 : si abbia per es. l'espressione

$$y = x + 6$$

facciamo

$$y + dy = (x + dx) + 6$$

$$e \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{(x + dx + 6) - (x + 6)}{dx}$$

$$= \frac{x + dx + 6 - 6 - x}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

e qui osserviamo subito come nel giuoco delle successive trasformazioni, i termini costanti come 6 spariscono senz'altro: la ragione la vedremo fra poco. Deriviamo ora una espressione in cui la x figuri alla 2^a potenza; per es.:

$$y = x^2 - 7$$

sarà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x + dx)^2 - 7 - x^2 + 7}{dx} =$$

$$= \frac{x^2 + 2xdx + (dx)^2 - x^2}{dx}.$$

Qui anche vediamo scomparire il termine costante — 7 e ci rimane una espressione complicata dal fatto che compare la dx al quadrato. Grandezza, o meglio piccolezza di secondo ordine, cioè tanto piccola rispetto a dx che possiamo senz'altro trascurarla e scrivere:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \frac{dx}{dx} = 2x.$$

Potremmo continuare con la 3ª, 4ª e 5ª potenza di x e risalire grado grado, faticosamente, la via della « completa induzione ». Ma, da provetti matematici scegliamo una via più breve, dato che lo sviluppo binominale ci fornisce i mezzi per risolvere il problema in via affatto generale. Proviamo infatti a differenziare la potenza generica: $y = x^n$.

L'incremento *dx*, dato ad x, ci fornisce l'espressione

$$y + dy = (x + dx)^n .$$

Nel cui secondo membro figura il binomio $(x + dx)^n$.

Facciamo ancora:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x + dx)^n - x^n}{dx}$$

e sviluppiamo il binomio. Avremo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left[x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}dx + \binom{n}{2} x^{n-2}(dx)^2 + \binom{n}{3} x^{n-3}(dx)^3 + \cdots\right] - x^n}{dx}$$

Possiamo subito notare che il primo termine fra parentesi quadre viene sempre annullato da quello ultimo

che è fuori parentesi, cosicchè rimane un'espressione complicatissima, ordinata secondo le potenze decrescenti della x e crescenti di (dx) che scriveremo:

$$\frac{dx}{dx} = \frac{\binom{n}{1}x^{n-1}dx + \binom{n}{2}x^{n-2}(dx)^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}(dx)^3 + \ldots}{dx}$$

Ma nulla ci vieta di fermarci al primo termine di questo polinomio, tanto più che non solo il secondo termine contiene un infinitesimo di secondo ordine $(dx)^2$, ma quelli appresso contengono infinitesimi $(dx)^3$, $(dx)^4$ di ordine ancor superiore, quindi trascurabilissimi. Che cosa rimane allora?

$$\text{Derivata di } x^n = \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

Verifichiamo, ponendo al posto di x un numero concreto, per es. successivamente, tutti i numeri 1, 2, 3... della serie naturale; avremo:

$$\text{Per } n = 1 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(x+dx)-x}{dx} = nx^{n-1} = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$$

$$n = 2 \quad \text{»} \quad = \quad = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$$

$$n = 3 \quad \text{»} \quad = \quad = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$$

e così via.

La derivata di una funzione in cui la variabile figura ad una potenza di esponente n qualunque, si ottiene moltiplicando per questo esponente la variabile elevata ad una potenza di un unità inferiore a quella che aveva prima (1).

La regola è affatto generale e vale anche per le potenze aventi per esponente numeri compresi fra due numeri interi consecutivi cioè per potenze fratte (radici) come

(1) Quando i lettori avranno vaghezza di esaminare altri processi di risoluzione di equazioni, per es. nelle opere del nostro grande Lagrange, vedranno come questo metodo di ricondurre un'equazione ad un'altra di ordine immediatamente inferiore sia affatto generale. (N. d. Tr.).

$$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \quad \text{o} \quad y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}.$$

Vediamo di derivare quest'ultima espressione:

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt{x}}.$$

Essa vale anche per potenza ad esponente negativo, come:

$$y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

poichè

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} =$$

$$= \text{in questo caso a} \; -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}.$$

Con esponenti negativi le potenze al denominatore vanno aumentando e ciò è perfettamente regolare, perchè questo ci conferma che la derivata diminuisce quanto più cresce il valore del numero al denominatore.

Questo decrescere del valore della funzione data, per via dell'operazione di derivazione ci permette di classificare la derivazione stessa con la sottrazione e la divisione fra le operazioni « litiche » o risolventi.

Il lettore perspicace avrà notato che fin qui abbiamo operato su funzioni in cui la variabile x non era affetta da coefficienti (o meglio era affetta dal coefficiente 1 che non si fa figurare). Questo si capisce senz'altro per la variabile y poichè dobbiamo fare in modo che la funzione sia sempre esplicita, cioè fare che tutti i coefficienti eventuali di y passino nel secondo membro dell'equazione. Ma la variabile indipendente x è general-

mente affetta da qualche coefficiente: come si comporta questo nella derivazione? Vediamolo in un caso concreto specifico:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^2) = \frac{3(x+dx)^2 - 3x^2}{dx}$$

$$= \frac{3[x^2 + 2xdx + (dx)^2] - 3x^2}{dx}$$

$$= \frac{3 \times 2xdx}{dx} = 3 \cdot 2x = 6x \ .$$

Se trascuriamo, come al solito, il termine $(dx)^2$ infinitesimo di second'ordine, avremo in generale:

$$\frac{d}{dx}(C.x^n) = C \cdot n \cdot x^{n-1}$$

dove C è la costante di cui è affetta la variabile indipendente – la quale costante si conserva inalterata durante e dopo la derivazione.

Vediamo il caso in cui ci sieno una di queste costanti più un termine costante qualunque.

Sia $$y = 3x^2 + 19$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^2 + 19) = 3 \cdot 2x = 6x.$$

Il termine costante scompare, come già sappiamo, mentre la costante della variabile rimane.

Facciamo ancora un passo avanti e consideriamo la derivazione di una funzione in cui la variabile indipendente figuri in più termini, sempre a potenza diversa. Sia per es.:

$$y = 4x^3 - 7x^2 + 9x - 26$$

e trattiamola nel modo consueto; sarà:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4(x+dx)^3 - 7(x+dx)^2 + 9(x+dx) - 26 - (4x^3 - 7x^2 + 9x - 26)}{dx}.$$

sviluppando le potenze fra parentesi, avremo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4(+3x^2dx + 3x(dx^2) + dx^3) - 7(+2xdx + dx^2) + 9dx}{dx}.$$

Trascurando $(dx)^2$ e $(dx)^3$, infinitesimi di ordine superiore, si arriva a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 \cdot 3x^2dx - 7 \cdot 2xdx + 9dx}{dx} = 12x^2 - 14x + 9.$$

Saremmo giunti ad eguale risultato se avessimo derivato la somma, termine per termine. Apprendiamo con ciò che: *la derivata di una somma di termini con x è uguale alla somma delle derivate dei singoli termini* (somma algebrica s'intende). Siamo dunque in grado di derivare la funzione generale e arcigna:

$$y = ax^n \pm bx^{n-1} \pm cx^{n-2} \pm \dots$$

Avvertiamo però che non possiamo differenziare in questo modo un prodotto di somme di più termini in x come per es.:

$$y = (x^2 + 3x - 1)(5x - 16)$$

oppure un loro quoziente come $y' = \frac{2x^3 - 7}{3x + 9}$ senza prima sviluppare il prodotto od il quoziente in una somma di termini.

E ora che abbiamo appreso la tecnica della derivazione delle potenze di un numero, diciamo qualcosa del significato geometrico di derivata che ci darà modo di fare nuove scoperte interessanti.

Sappiamo ormai, anche per esperienza, che la derivata non è altro che il rapporto all'incremento dx dato alla variabile indipendente, dell'incremento dy che per esso assume la funzione y. Se consideriamo x come un valore dell'ascissa in una rappresentazione grafica in assi coordinati dx sarà un incremento piccolissimo (infinitesimo) di questa e dy l'incremento corrispondente della relativa ordinata.

In altre parole: come si comporta l'incremento dell'ordinata per un incremento dell'ascissa corrispondente? Cioè quando ad un qualsiasi x si dà un incremento piccolo quanto si vuole?

Poichè *ds* è notoriamente null'altro che un pezzettino di tangente, posso prolungare questo segmento di retta fino a che venga ad intersecare l'asse delle x. L'angolo α sotto il quale questa tangente viene a tagliare l'asse delle ascisse è uguale all'angolo che *ds* forma con *dx*, poichè un lato *ds* e il suo prolungamento (tangente) sono coincidenti e l'altro lato *dx*, per costruzione, è parallelo all'asse delle ascisse. Se dunque considero la derivata $\frac{dy}{dx}$ come funzione trigonometrica, devo riconoscere che il rapporto $\frac{dy}{dx}$ non è altro che la tangente dell'angolo α; scriverò dunque:

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang } \alpha$$

α essendo la « costante angolare » della tangente nel punto considerato della curva.

L'espressione numerica della derivata è in ogni punto della curva eguale alla tangente trigonometrica dell'an-

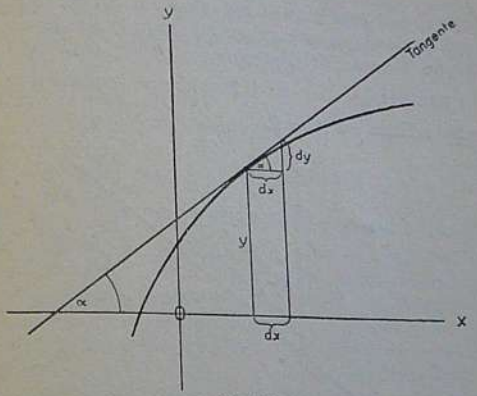


Fig. 53

golo che una linea, tangente nello stesso punto alla curva, fa con l'asse delle ascisse.

Di qui deriva una conseguenza importantissima: l'espressione analitica di una curva permette di calcolare le coordinate di ogni punto della curva stessa, mentre la derivata di questa espressione analitica (funzione della variabile) rispetto alla variabile stessa, ci fornisce la legge generale dell'andamento della curva, in quanto dà l'inclinazione della tangente in ogni punto della curva stessa.

Ci basta dunque di porre nella funzione, al posto di x, un qualunque numero per ricavarne subito y: cioè l'altra coordinata: e se al posto della x nella espressione della derivata poniamo questo stesso numero da noi scelto, veniamo subito a sapere che inclinazione ha la tangente alla curva in questo punto, poichè conosciamo la costante angolare di questa tangente.

Dimostriamo con un esempio questo giuoco dei bus-

solotti che ci permette di tracciare una tangente ad un punto qualsiasi di una curva che neppure vediamo, nè abbiamo bisogno di disegnare.

Di una parabola $\frac{1}{10}x^2 + 3$ vogliamo segnare il punto corrispondente ad $x = 4$.

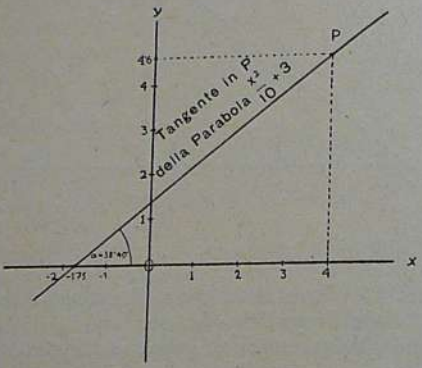


Fig. 54

Per $x = 4$ sarà $y = \frac{1}{10}16 + 3 = \frac{16}{10} + \frac{30}{10} = \frac{46}{10} = 4.6$.

Le coordinate del punto sono dunque $x = 4$ e $y = 4.6$.

Facciamo la derivata della funzione:

$$y = \frac{1}{10}x^2 + 3 \quad \text{avremo:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{10}x = \frac{x}{5} = 0.8 = \text{tang } \alpha$$

Le tavole trigonometriche ci danno subito il valore α dell'angolo che ha per tangente 0,8 e che è di 38°40'.

La tangente nel piano coordinato del disegno avrà la posizione segnata in fig. 54. Procedendo nello stesso modo per altri punti, possiamo tracciare la parabola con l'inviluppo delle sue tangenti.

Capitolo XXXI

MASSIMI E MINIMI

La proprietà della derivata ora indicata è stata storicamente la causa della sua scoperta: essa deriva da quei « problemi delle tangenti » che particolarmente nel XVII secolo, da Cartesio in poi, sono stati considerati e investigati con precisione sempre maggiore. La ragione di questo interesse era fra le altre la seguente: qualsiasi andamento di un fatto o di un fenomeno avente una certa continuità, oppure semplicemente la relazione continua fra causa ed effetto o fra due grandezze variabili, si può rappresentare con una funzione e quindi con una curva. Ora può sorgere il quesito: entro un certo campo di variazione delle anzidette grandezze (ossia in di un certo tratto della curva che ne rappresenta l'andamento) si può dare un punto più elevato ed un punto più basso della curva stessa. Come determinare questo *massimo* o questo *minimo*?

Dalla rappresentazione grafica si vede subito (fig. 57) che nel tratto fra x_1 e x_2 la curva disegnata presenta prima un massimo, poi un minimo. Di più è chiaro che tanto nel punto di massimo che in quello di minimo la tangente alla curva è parallela all'asse delle ascisse: se la curva fosse rappresentata da un filo di ferro piegato si potrebbe prenderlo tra due parallele che fossero disposte in direzione dell'asse delle ascisse. Il punto di minimo appoggierebbe contro la riga più bassa, quello di massimo contro la riga parallela più alta.

Ora ecco l'ingegnoso artifizio di Leibnitz che egli pubblicò nella sua famosa memoria « sui massimi e minimi » nell'« Acta Eruditorum » del 1684 (1), uno dei primi giornali scientifici del tempo, da lui fondato, e nel quale espose pure l'algoritmo del calcolo differenziale.

Egli viene alla conclusione che dal momento che la derivata rappresenta la funzione angolare « tangente », questa dovrà avere valore nullo ogni qualvolta la tangente ad una curva risulterà parallela all'asse delle ascisse, cioè quando l'inclinazione rispetto all'asse 0x della tangente tirata per un punto qualunque di una curva è nulla.

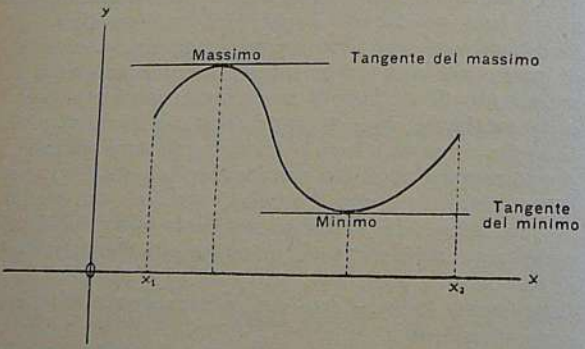


Fig. 55

Difatti sappiamo che la tangente trigonometrica dell'angolo di 0° ha valore zero.

Con una geniale inversione del procedimento, data la funzione rappresentativa di una curva, ne formiamo la derivata rispetto ad x e la eguagliamo a zero

---

(1) L'autore, tedesco, attribuisce il metodo a Leibnitz. Faccio osservare che il matematico francese Pietro Fermat, morto nel 1665, l'aveva già largamente usato e indicato nel suo libro De Maximis et Minimis. (N. d. Tr.).

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$$

calcolando, dall'equazione che ne deriva, il valore di x: che sarà quello che rappresenta l'ascissa di un massimo o di un minimo della curva stessa.

Dico un massimo o un minimo e questo ci sembra equivoco e malsicuro. Diremo subito che già lo stesso Leibnitz aveva condotto tutti i calcoli accessori e aveva trovato il modo di determinare se si trattasse di un massimo oppure di un minimo. Questo si può fare anche graficamente oppure dedurre senz'altro dall'andamento generale della curva. La determinazione analitica di questa natura di massimo o di minimo ci condurrebbe troppo fuori del nostro programma. Ci accontenteremo di vedere qualche caso pratico di determinazione di massimo o di minimo in base alle conoscenze acquisite.

Proponiamoci un giuoco interessante che ha la sua importanza pratica: vogliamo con una lastra di metallo costruire un recipiente parallelepipedo che abbia la massima capacità possibile, compatibilmente con le dimensioni della lastra. Quando la lastra fosse in metallo costoso c'interesserebbe d'impiegarne il meno che si può per quel dato scopo.

Ogni ragazzino che sa fare delle costruzioni in carta, vi dirà che per fare questo recipiente basta prendere un foglio quadro e tagliar via in corrispondenza dei vertici del quadrato, quattro quadratini, rappresentati in tratteggio nella fig. 56. Ma quanto grandi devono essere questi quadratini da tagliar via? Quale deve essere la lunghezza del lato x in vista dello scopo che ci siamo prefissi? Le soluzioni del problema sembrano infinite, tutte comprese fra i limiti $x = 0$ e $x = \frac{a}{2}$ (dove a è il lato della lastra da ritagliare). La cubatura della nostra scatola varierà coi valori che daremo ad x, sarà

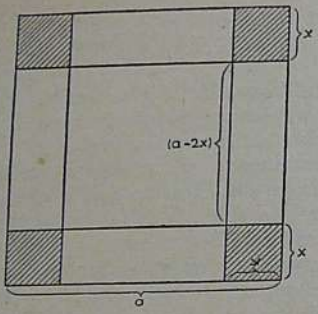


Fig. 56

cioè una funzione di x: ad ogni valore della variabile corrisponderà un diverso valore di $y = f(x)$, cioè della capacità della scatola. Dobbiamo dunque prima determinare qual'è la funzione $y = f(x)$ poi ne faremo la derivata che uguaglieremo a zero e l'equazione che ne risulta e che sarà un'equazione in x, ci permetterà di trovare il valore dell'incognita che rende massima la funzione. Cioè quella lunghezza x del lato del quadratino da asportare che farà sì che, ripiegando poi i lembi delle faccie laterali della scatola stessa ne ricaviamo la scatola di più grande capacità.

Per semplicità noi supporremo che il nostro parallelepipedo sia rettangolo: la nostra scatola avrà dunque un fondo quadrato di lato $(a - 2x)$ e l'area di questo quadrato sarà espressa in funzione dell'incognita x e della costante a, lato del foglio, da: $(a - 2x)(a - 2x) = (a - 2x)^2$. Di qui risulta che l'altezza del nostro cubo sarà x. Il suo volume sarà espresso, sempre in funzione di a ed x da $(a - 2x)^2 \times x$ (base per l'altezza): quindi la funzione che esprime il volume del cubo in funzione della x sarà:

$$y = (a - 2x)^2 x = (a^2 - 4ax + 4x^2);$$

sviluppando e ordinando secondo le potenze decrescenti della x, si ha la funzione esplicita:

$$y = 4x^3 - 4ax^2 + a^2 x$$

che è di terzo grado, poichè rappresenta un volume.

Il passo appresso sarà quello di derivare questa funzione rispetto ad x:

$$\frac{dy}{dx} = 4 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2ax + a^2 \cdot 1 \cdot x^0$$

$$= 12x^2 - 8ax + a^2.$$

Eguagliamo a zero questa derivata: avremo una equazione di secondo grado che ci fornirà due valori per x cioè $\frac{a}{2}$ e $\frac{a}{6}$. Il primo valore è da scartarsi perchè costituisce un caso limite (cioè quello di una scatola con fondo di area zero). Il secondo valore è quello che ci dà la profondità con la quale dobbiamo tagliar via i quadratini d'angolo: i lati del cubo avranno altezza $= \frac{a}{6}$ mentre il quadrato di base sarà di lato $\left(a - \frac{2a}{6}\right) =$ $= \frac{2}{3} a$.

Per avere un'idea delle proporzioni della nostra scatola, traduciamo questo risultato in cifre concrete: supponiamo che il nostro foglio metallico abbia 60 cm. di lato: dovremo tracciare come divisione tante rette distanti $\frac{2}{3} a = \frac{2 \cdot 6}{3} = 40$ cm.

Il quadrato centrale costituirà il fondo della scatola; tagliamo via ai vertici del foglio 4 quadratini di 10 cm. di lato e ripieghiamo i lembi per formare i fianchi della *scatola*. Questa risulta di capacità $4 \times 4 \times 1$ decimetri$^3 = 16$ litri che è la capacità massima. Difatti, proviamoci a ritagliare un'altra scatola qualunque: per

es. portando via agli angoli quattro quadratini di cm. 5 di lato: otterremo una scatola a più larga base (di 5×5 decimetri) con altezza metà della prima cioè 0,5 decimetri e di volume $5 \times 5 \times 0{,}5 = 12{,}5$ litri.

Qualcuno potrà dire che « a buon senso » la scatola perfettamente cubica deve avere la capacità massima: proviamo. Taglieremo via dei quadratini di $\frac{60}{3} = 20$ cm. di lato. Il fondo della scatola risulterà di 2×2 decimetri e l'altezza di 2 decimetri. Il volume sarà di $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ decimetri cubi ossia 8 litri, cioè precisamente la metà di quella da noi trovata come massima. Se mai questa sarà la scatola di capacità minima.

« Vedi giudizio uman come spesso erra ». Qui la matematica ci guida meglio del cosidetto « buon senso ».

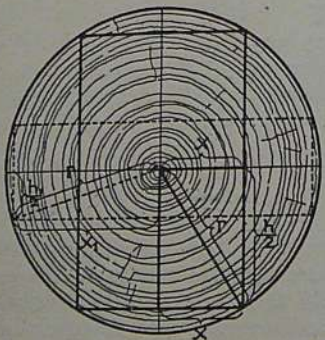


Fig. 57

E ora passiamo ad un problema pratico da carpentiere: Abbiamo un tronco d'albero dal quale vogliamo ricavare una trave per fare un colmo di tetto. Perchè la nostra trave abbia la massima resistenza, gli ingegneri ci dicono che deve avere la massima altezza per una data sezione retta. Dovremo dunque ricavare dalla

sezione del tronco una trave parallelepipeda di massima sezione e di massima altezza compatibile con essa.

Dalla fig. 57 vediamo che possiamo far segare il nostro tronco in diversi modi: la sagoma a tratti ci darebbe la trave di massima altezza ma non di massima sezione. Tutte le considerazioni che potremo fare a « buon senso » sul modo di segare quel tronco non valgono un semplice calcolo che ci condurrà difilato alla soluzione.

L'ingegnere ci dice che la sezione di trave che offre massima resistenza è quella che si ottiene con altezza h^2 e base b, cioè quella che ha per area $A = h^2b$.

Chiamiamo in aiuto il vecchio Pitagora. Avremo misurato la circonferenza del tronco la quale ci fornirà subito il raggio r del cerchio inscritto: chiamiamo ora x la metà della base b della sezione rettangola cercata. Il teorema di Pitagora ci dà subito per la metà dell'altezza h la relazione: $\left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2 - x^2$ ossia $\frac{h^2}{4} = r^2 - x^2$ e quindi il valore di $h^2 = 4r^2 - 4x^2$. Eccoci in possesso dei due dati h^2 e $b = 2x$, entrambi espressi in funzione di x. Scriveremo dunque:

$$A = y = h^2.b = (4r^2 - 4x^2).2x$$
$$= 8r^2x - 8x^3.$$

Questa è la funzione la cui derivata eguagliata a zero ci fornirà il valore di x che rende massima l'area della sezione retta del nostro trave. Eseguiamo:

$$\frac{dy}{dx} = 8r^2.1.x^0 - 8.3.x^2$$
$$= 8r^2 - 24x^2.$$

Eguagliamo a zero e ricaviamo il valore di x.

$$8r^2 - 24x^2 = 0$$
$$24x^2 = 8r^2$$

$$x^2 = \frac{8}{24} r^2$$

$$x^2 = \frac{1}{3} r^2$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{r^2}{3}} = \pm r\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{r}{\sqrt{3}} = \pm \frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

Il valore negativo di x non c'interessa, quindi prenderemo solo quello positivo. Esso ci dà per x un valore che è la 1.73^{ma} parte del raggio r. E allora facciamo tracciare una mezzeria (un diametro) e portiamo a destra e a sinistra di questa una lunghezza pari a 1.73^{mo} del raggio r, tiriamo due parallele alla mezzeria e diciamo ai segantini di segare secondo il tracciato.

Per finire un esempio di minimo. È noto che in un quadrato si possono inscrivere (con i vertici sui suoi lati) quanti quadrati si vogliano. Vogliamo trovare il lato b del quadrato inscritto di area minima (fig. 58).

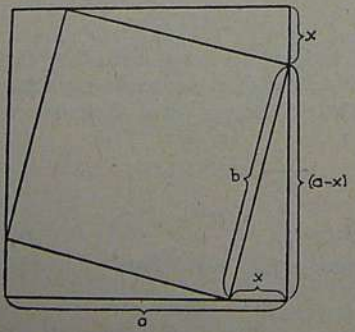


Fig. 58

Il campo delle nostre operazioni comprenderà tutti i possibili quadrati, per i quali x può variare da zero al valore a del lato del quadrato dato. Il quadrato inscritto di area massima, si avrà evidentemente per $x = 0$ che ci dà $b = a$.

Se facciamo ruotare il quadrato inscritto, i suoi vertici si spostano sul lato a e x cresce da zero fino a un certo valore per cui b diventa minimo. Sarà dunque b funzione di x. Cerchiamo qual'è questa funzione $y = f(x)$ per cui x rende minima l'area $b \times b$ del quadrato inscritto. Essa sarà evidentemente $b^2 = y = f(x)$.

Per esprimere b^2 in funzione di x, ricorriamo di nuovo al teorema di Pitagora. La fig. 48 ci mostra che:

$$\begin{aligned} b^2 &= x^2 + (a - x)^2 \\ &= x^2 + a^2 - 2ax + x^2 \\ &= 2x^2 - 2ax + a^2. \end{aligned}$$

Trovata così la funzione, facciamone la derivata:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 2x - 2a \cdot 1 \cdot x^0 = 4x - 2a.$$

Eguagliamo a zero e dall'equazione risultante ricaveremo subito, anche senza scrivere, il valore di $x = \frac{a}{2}$. Che cosa vuol dire questo risultato? Che il quadrato inscritto di area minima è quello che ha i vertici sulla metà dei lati a dell'altro. Qui la soluzione è unica e non c'è da sbagliare.

La verifica la può fare il lettore prendendo per x altri valori qualunque, calcolandone la y, poi l'area del quadrato che sarà data da

$$y^2 = 2x^2 - 2ax + a^2.$$

Portando su di un foglio di carta, diverse ordinate $y' y'' y''' \ldots$ corrispondenti ai valori $x', x'' x'''$ assunti per x si può tracciare una curva che accuserà un minimo per $x = \frac{1}{2} a$.

Capitolo XXXII

LA TECNICA DEL CALCOLO INTEGRALE

Occorre che ci riallacciamo a quel punto della nostra esposizione in cui parlavamo della possibilità della integrazione. Noi avevamo allora assodato che la funzione sotto il segno d'integrale si comportava rispetto al valore dell'integrale stesso, nello stesso identico modo della derivata di una funzione rispetto alla funzione stessa. Vale a dire $F(x) = \int y'dx$ oppure $= \int f'(x)dx$ poichè difatti $dy = f'(x)dx$ e integrando entrambi i membri di quest'ultima equazione si ottiene $\int dy = \int f'(x)dx$. Ma $\int dy = F(x)$ cioè la funzione originaria y.

Poichè nel frattempo abbiamo imparato le regole fondamentali del calcolo differenziale noi potremo ora procedere in senso inverso, dal noto al non ancora noto e ricavare certe regole per l'integrazione. Non faremo che derivare una funzione determinata, eppoi cercheremo di ricavare dalla derivata la funzione originaria per via d'integrazione. Così avremo la speranza di poter chiarire il meccanismo del procedimento d'integrazione in modo puramente algebrico. Una volta in possessó dell'algoritmo dell'integrazione, avremo assolto il compito che ci siamo proposti con questo libro.

Procediamo dunque come sempre, per esempi concreti e scegliamo come funzione originaria:

$$F(x) = y = 2x^3 - 7x^2 + x + 89\,;$$

facciamone la derivata:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = y' = 2.3x^2 - 7.2x + 1.x^0$$

$$= 6x^2 - 14x + 1.$$

Già qui possiamo notare una fatale mancanza di univocità dell'integrazione. Essa non ci procura un valore unico, ma parecchi valori che si differenziano per una costante. Il valore è cioè determinato « a meno di una costante d'integrazione ». Nessuno può dire qual'è il valore di questa costante quando si vuol risalire dalla derivata alla funzione originaria; può anche darsi che non ci sia costante. Sia che la funzione originaria contenga una costante, sia che non la contenga, la derivata di essa è sempre zero.

Potrebbe anche darsi che ci sieno più costanti (una somma di costanti) oppure un prodotto od un quoziente di costanti; durante la derivazione esse sono scomparse.

Quando dunque si vuol considerare la funzione sotto segno integrale come derivata di una funzione ancora sconosciuta, non si può logicamente parlare di « funzione originaria ». Allora si aggiunge la riserva: « a meno di una costante C » che può essere additiva o sottrattiva.

A rigore si dovrà dunque scrivere:

$$F(x) = y = \int f'(x) \pm C$$

oppure semplicemente $\int f'(x) + C$ quando si premette che C possa anche assumere valori negativi. Così va dunque scritto l'integrale indefinito ed anche se non si scrivesse esplicitamente il C, lo si sottintende sempre. Vedremo poi come si determini questa costante in un integrale definito.

Per ora non ci lasciamo turbare da questa costante e tiriamo diritto.

In base alle nostre asserzioni la funzione originaria y o F (x) dev'essere eguale all'$\int f'(x)dx$ o nel caso concreto in esame:

$$F(x) = y = \int (6x^2 - 14x + 1)\, dx + C.$$

Praticamente si osservi che il dx posto a destra determina il « contenuto » (tra parentesi) dell'integrale, mentre il C sta sempre a parte.

Raffrontiamo i termini in x della funzione originaria con i corrispondenti termini della funzione sotto il segno d'integrale e scriviamoli perciò ordinatamente uno sotto l'altro:

Potenze della x (funzione originaria) : $2x^3 - 7x^2 + x$
» » » sotto l'integrale : $6x^2 - 14x + 1$.

Osserviamo anzitutto che, come nel derivare, così per integrare possiamo procedere termine per termine in tutti quei casi in cui la x figuri in un polinomio. Questa regola si può esprimere così:

$$\int(6x^2 - 14x + 1)dx = \int 6x^2dx - \int 14xdx + \int 1.dx$$

che a parole ci dice che: l'integrale di una somma algebrica di termini è la somma algebrica degli integrali dei singoli termini.

Ricordiamoci poi che l'integrale non è che una specie di somma di parti infinitamente piccole. Per una siffatta somma vale la legge distributiva per i fattori costanti (coefficienti): poichè per ogni somma come: $3a + 3(a + h) + 3(a + 2h) + 3(a + 3h) + \ldots$ si può scrivere $3[a + (a + h) + (a + 2h) + (a + 3h) + \ldots]$ oppure ancora $3 \sum_{0}^{m=n} (a + mh)$. Perciò tutte le costanti o fattori di moltiplicazione possono essere portati fuori, prima del segno integrale, così che potremo sempre scrivere:

$$\int(6x^2 - 14x + 1)dx = 6\int x^2dx - 14\int xdx + 1\int dx.$$

Ora torniamo al quesito: come risalire dalla potenza della x che appare sotto il segno integrale alla potenza della x nella funzione originaria? Come, in altre parole, si può passare da $6x^2$ a $2x^3$, dalla $14x$ alla $7x^2$ e da 1 ad x?

La prima cosa che ci colpisce nell'integrazione è che la potenza della x cresce di grado e cioè di una unità all'esponente, il che è comprensibile dal momento che

nella derivazione la potenza della x diminuiva di una unità all'esponente. Così in generale, coefficiente a parte, $\int x^m dx = x^{m+1}$.

Che valore dare al coefficiente? Notiamo che da $2x^3$, derivando, si ottiene $3.2x^2$: integrando si ricava $2x^3$ cioè $\frac{2 \cdot 3}{2} x^{2+1}$, cioè si deve fare l'operazione inversa che nella derivazione. Invece di moltiplicare il coefficiente per l'esponente 3, si divide per questo, cioè per $2 + 1$. In generale possiamo quindi affermare che $\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$.

Verifichiamo sulle nostre altre potenze della x: che valore ha $\int x dx$? Qui l'esponente $m = 1$ allora $\int x dx = \frac{1}{1+1} x^{1+1} = \frac{1}{2} x^2$ e, se teniamo conto dell'esponente 14, $14 \int x dx = 7x^2$. Finalmente $1 \cdot \int dx = \int x^0 dx = \frac{1}{0+1} x^{0+1} = \frac{1}{1} = x$. Manifestamente la regola torna. Siamo dunque formalmente in possesso di uno degli algoritmi del calcolo integrale: quello che riguarda le potenze della x.

Non è forse vero che il comando $\int$ non riesce più difficile da eseguire di qualunque altro comando matematico? Ho dunque tenuto la mia parola.

Certamente tutto questo vale solo per funzioni algebriche razionali, ma si fa già molta strada con esse. Vediamone un esempio o due:

$$\text{Sia dato: } \int \frac{1}{x^n} dx = \int x^{-n} dx = \frac{1}{1-n} x^{1-n}$$

basta stare bene attenti ai segni.

Così:

$$\int \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} = \int x^{-n/m} = \frac{1}{1-\frac{n}{m}} x^{1-\frac{n}{m}} = \frac{m}{m-n} x^{\frac{m-n}{m}} = \frac{m}{m-n} \sqrt[m]{x^{m-n}}.$$

Non nascondiamo però al lettore che qui non basta solo applicare la regoletta per riuscire ad integrare espressioni come:

$$\int_0^x \sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}} + \frac{k}{2}\log\left(\frac{x}{k} + \sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}\right)$$

che rappresenta la rettificazione di una parabola.

Ci vuole una certa arte matematica per trasformare l'espressione in un'altra facilmente integrabile. In questo sta l'abilità del calcolatore.

Non si deve neppure tacere che ci sono degli integrali che finora nessuno è riuscito ad integrare. Allora i matematici ricorrono ad artifizi che forniscono soluzioni approssimate.

Per quanto non abbiamo fatto che varcare la soglia del calcolo integrale, con le conoscenze fin qui acquisite siamo già in grado di risolvere numerosi problemi d'integrazione. E sopratutto ci siamo capacitati del principio del calcolo integrale, cosicchè siamo in grado di comprendere tante cose che sembrano rompicapi ai non iniziati e non ci spaventeremo più quando vedremo apparire in mezzo ad un calcolo quel segno $\int$ che prima c'incuteva tanto rispetto e di cui molti autori infarciscono i loro scritti sovente tutt'altro che a proposito, per darsi un contegno di matematici. Sapremo dunque anche qui scoprire il trucco.

Finiamo questo capitolo con un altro problema di quadratura: Vogliamo tracciare la curva di equazione $y = x - x^2$ e proporci di trovarne la quadratura entro determinati limiti?

Poichè facendo $x = 0$ anche y diventa zero, la curva passerà per l'origine degli assi coordinati. Per $x = 1$ avremo di nuovo $y = 0$ e quindi la curva taglia l'asse delle x nel punto di ascissa $x = 1$.

Combiniamo l'arte nostra e determiniamo con un problema di massimo, qual'è il valore massimo di questa curva nel suddetto intervallo $x = 0$ e $x = 1$.

In questo intervallo la derivata della nostra funzione sarà:

$$y' = f'(x) = \frac{dx}{dy} = 1 - 2x.$$

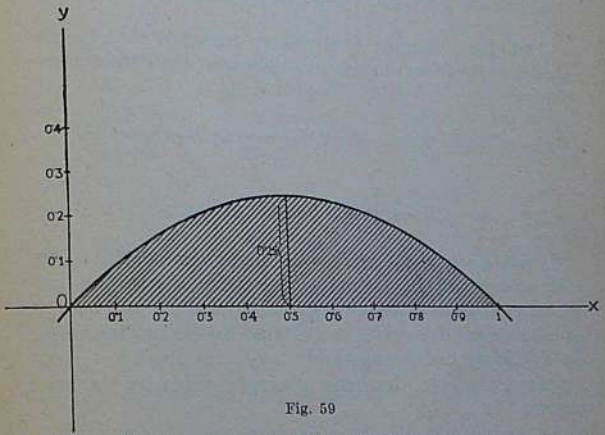


Fig. 59

Eguagliando a zero e risolvendo rispetto ad x avremo: $1 - 2x = 0$ da cui si ha subito $x = \frac{1}{2}$. Questo valore di x è compreso nell'intervallo stabilito e quindi risponde al nostro quesito. Allora per trovare il valore corrispondente dell'ordinata massima, mettiamo nella nostra funzione primitiva $\frac{1}{2}$ al posto di x avremo:

$$y = x - x^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)_2^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

L'ordinata sarà $\frac{1}{4}$ dell'unità di misura adottata per le ordinate e sarà l'ordinata massima.

E ora per fare la quadratura, cioè per trovare l'area della superficie compresa fra la curva e l'asse delle ascisse: curva, notiamo bene, di cui non conosciamo che tre punti soli. Ma bastano: Due dei punti $x = 0$ e $x = 1$ stabiliranno i limiti del nostro integrale: $\int_0^1 (x - x^2)dx =$ Area cercata.

Dobbiamo dunque risolvere un integrale definito fra due limiti. Incominciamo a calcolare l'integrale indefinito:

$$\int (x - x^2)dx = \int x dx - \int x^2 dx = \frac{1}{1+1} x^{1+1} - \frac{1}{2+1} x^{2+1} =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \text{ più una costante C.}$$

Il passo seguente sarà quello di stabilire i limiti, con che scomparirà la costante. Mettendo la cosa un po' superficialmente si può dire che anche qui c'è una regola: la sottrazione del valore dell'integrale al limite inferiore, da quello al limite superiore.

Quando per es. in linea generale abbiamo da fare con un

$$\int_b^a f'(x)dx$$

fra due limiti definiti a e b (valori di x ai limiti) la soluzione dell'integrale indefinito sarà $f(x) + C$: mettiamo al posto di x nella funzione $f(x)$ prima b poi a e facciamo la differenza. Avremo:

$$\int_b^a f'(x)dx = [f(x)] = [f(b) + C] - [f(a) + C] = f(b) - f(a).$$

La costante C si è eliminata spontaneamente e non ci dà più fastidio, lasciandoci un valore unico per l'integrale.

E poichè nel caso concreto che stiamo esaminando il valore dell'integrale indefinito è risultato:

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + C,$$

sostituendo i valori ai limiti, avremo:

$$\left[\frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{3}(1)^3 + C\right] - \left[\frac{1}{2}(0)^2 - \frac{1}{3}(0)^3 + C\right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + C - C = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}.$$

Che cosa vuol dire questo $^1/_6$? Che l'area della superficie data vale $^1/_6$ dell'unità quadratica dell'unità lineare adottata per la misura di x e di y supposta un'unica unità di misura *m.*, *cm.*, *mm.* per entrambe (1).

Capitolo XXXIII

VALORE MEDIO E INTEGRALE DEFINITO

Non abbandoniamo il nostro esempio senza accennare ancora a qualcos'altro. Poichè la linea base 0 1 della nostra figura vale 1 e l'area della superficie vale $\frac{1}{6}$ di 1 (supposte eguali le scale per le ascisse e le ordinate) potremo dire che $1 \times \frac{1}{6}$ cioè $\frac{1}{6}$ è anche l'area di un rettangolo di lati 1 e $\frac{1}{6}$ equivalente alla superficie calcolata o in altre parole possiamo dire che $\frac{1}{6}$ è il valore dell'ordinata media oppure che è il « valore

(1) Nel caso in cui si adottasse una diversa unità di misura per le ascisse che non per le ordinate (cosa che si fa di frequente, l'unità quadratica sarà l'area di un rettangolo invece di quella di un quadrato. Così se per le ordinate usiamo il centimetro e per le ascisse il millimetro, potremo esprimere l'unità di area tanto in cm. quadrati, quanto in mm. quadrati. Nel primo caso l'unità di misura sarà $1 \times 0{,}1 = 0{,}1$ cm.^{2} nel secondo sarà $10 \times 1 = 10$ mm.^{2}. Questo numero va sempre notato e si dice rapporto di scala. (N. d. Tr.).

medio di tutte le ordinate » che si possono innalzare dall'asse delle ascisse fino al tratto di curva che abbiamo disegnato.

Esaminiamo un po' più da vicino questo concetto nuovo di « valore medio ». Noi sappiamo dall'aritmetica che il valore medio aritmetico di più termini di valore diverso è uguale alla loro somma divisa per il numero dei termini.

In termini generici la media aritmetica si può rappresentare con

$$M_A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_n}{n} \qquad (1)$$

Il nostro valore dell'ordinata media nel caso della curva in quistione è però una media di un numero infinito di valori dell'ordinata (cioè sarà la somma di tutte le infinite y, come diceva il Cavalieri); ma a questa somma quale denominatore daremo? Non certo l' ∞ se no il nostro valore medio va a zero. Metteremo i limiti del nostro integrale e scriveremo:

$$\frac{\int_a^b f'(x)dx}{b-a} = M_A.$$

Il segmento $b - a$ rappresenta difatti l'infinito numero dei punti, piedi delle infinite ordinate innalzate sul tratto $a - b$ delle ascisse, cioè entro i limiti definiti da noi stabiliti.

Ma prima di applicare ad un esempio concreto la formola che abbiamo scritta ora per il valore dell'ordinata media, formola che ha una enorme importanza pratica, verifichiamone l'esattezza nel caso della nostra quadratura.

---

(1) Quella che si chiama invece Media geometrica è la radice nesima degli n termini: espressa da:

$$M_G = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \dots a_n}$$

Avevamo trovato per l'$\int_0^1 (x - x^2)dx$ della nostra superficie il valore $\frac{1}{6}$ di unità di area. Questo $\frac{1}{6}$ sarà dunque il numeratore della frazione. Il denominatore è evidentemente 1 perchè i limiti da noi posti erano $x = 0$ e $x = 1$ quindi $a - b = 1 - 0 = 1$. Avremo dunque $M_A = \frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6}$, ciò che torna perfettamente.

Tutti sanno quel che sieno gli strumenti (termometri, barometri, wattometri ecc.) registratori. Essi segnano in modo continuo, su di un foglio di carta che si svolge regolarmente da un tamburo, un certo « diagramma », cioè una curva, in cui le ascisse sono in generale determinate dal tempo (ogni cm. mm. di svolgimento della striscia di carta sta a rappresentare un'ora, un minuto, o un giorno ecc.).

L'ordinata rappresenta la variazione della grandezza che si registra: millimetri di colonna di mercurio nel barometro, gradi centigradi nel termometro, kilowatt nel kilowattometro ecc.

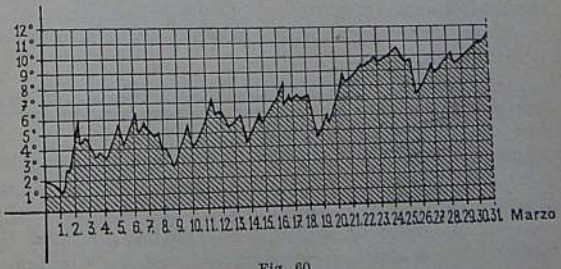


Fig. 60

Alla fine della giornata, della settimana, del mese; insomma alla fine dell'intervallo di tempo stabilito per la misura, si taglia via la striscia di carta che apparirà come a fig. 60 e che rappresenta il diagramma delle variazioni della temperatura durante il mese di marzo.

L'osservatorio che possiede questo termometro registratore, vuole fare la temperatura media del mese di marzo. Dovrà trovare l'ordinata media di quel complicato diagramma. Ma non c'è calcolo integrale che ci permetta di mettere in equazione quella curva capricciosa.

Il valore dell'integrale dell'area tratteggiata si deve trovare e si può trovare (per es. con degli strumenti detti planimetri). Ma possiamo usare d'un artifizio di cui si era servito persino Archimede. Incolliamo il nostro diagramma su di una lastra di zinco di spessore uniforme e con una cesoia ritagliamo accuratamente tutta la figura tratteggiata, poi pesiamola su di una bilancia di precisione. Poi ritagliamo nella stessa lastra un quadratino che rappresenti l'unità di misura di superficie (1 cm.^{2} per es.) e pesiamolo. Il rapporto del primo peso al secondo ci darà il valore dell'area della superficie del diagramma.

Dividiamo ora quest'area per la lunghezza (in cm.) della « base » del diagramma, ed avremo l'ordinata media cercata (espressa in cm.).

Queste diverse operazioni si possono riassumere nella formola matematica:

$$\frac{\text{Risultato della pesata} = \text{n volte il peso del quadratino}}{\text{b} - \text{a}} = \frac{\int_a^b f'(x)dx}{b - a}.$$

Questo esempio banale ci mostra l'enorme valore delle operazioni che si possono eseguire mentalmente. In tutto il nostro procedimento non abbiamo mai dovuto risolvere un integrale: ne abbiamo solo parlato, perchè il metodo deriva dal e si appoggia al calcolo integrale.

Prima di procedere ad altri esempi di quadrature, esaminiamo una proprietà dell'integrale definito che costituisce sovente un rompicapo per i principianti. Si tratta della eliminazione della costante d'integrazione. Dal punto di vista aritmetico abbiamo già visto come av-

venga questa sparizione della costante C, comunque essa appaia nell'integrale indefinito; come termine additivo o sottrattivo, cioè col segno + o col —. Se questo fosse aggiunto all'integrale indefinito $\int f'(x)dx$, allora il calcolo dell'integrale definito fra a e b della stessa funzione, cioè $\int_a^b f'(x)dx$ avrebbe la forma:

$$[\int f'(b)dx + C] - [\int f'(a)dx + C] = f(b) + C - f(a) - C = f(b) - f(a)$$

oppure

$$[\int f'(b)dx - C] - [\int f'(a)dx - C] = f(b) - C - f(a) + C = f(b) - f(a).$$

Dal punto di vista geometrico questa sottrazione non rappresenta altro che la deduzione di una superficie minore da una maggiore: almeno come risultato finale. E fintantochè la costante rimane nel giuoco, geometricamente, si ha una deduzione di una ordinata da un'altra. Per comprendere la cosa esattamente occorre introdurre il concetto di «curva differenziale» e di «curva integrale» e spiegarlo.

Noi sappiamo già che ogni funzione è la rappresentazione analitica di una curva tracciata in un piano ad assi cartesiani.

L'esempio precedente ci ha mostrato come, data una funzione, per es. $y = x - x^2$ noi possiamo tracciare una curva che la rappresenti (fig. 59) oppure un solo tratto di questa entro determinati limiti. Quando integriamo la funzione y otteniamo

$$F(x) = \int (x - x^2)dx \pm C = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \pm C$$

cioè una nuova funzione di x che noi possiamo rappresentare col disegno. Questa nuova curva della funzione originaria $F(x)$ ci dà la «curva integrale» della funzione $y = x - x^2$.

Nulla però sappiamo riguardo alla costante C: nemmeno se essa ha segno + o segno —: potrebbe anche essere zero. Che cosa vuol dire dunque dal punto di vista dell'analisi una costante additiva o sottrattiva? Diciamolo subito: la curva non modifica la sua forma o il suo andamento per l'aggiunta o la sottrazione di una costante. Questa non fa che provocarne lo spostamento nel sistema delle coordinate.

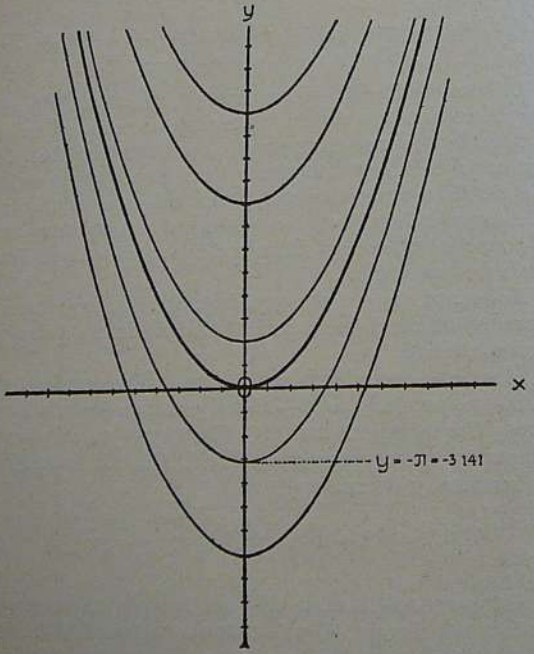


Fig. 61

Abbiamo già visto qualcosa di simile per la retta: vediamolo per una curva: una qualunque parabola rappresentata analiticamente da $y = \frac{x^2}{4} \pm C$ si presenta come in fig. 61 a seconda del valore di C.

E poichè C può assumere un qualunque valore tra $+\infty$ e $-\infty$, ogni integrale indefinito viene a rappresentare una famiglia di curve simili che potrebbe «riempire» per così dire il piano del disegno.

Questa proprietà dell'integrale ha una importanza enorme nella fisica. Quando per es. si riesce in un certo campo (su di una superficie piana o nello spazio) a stabilire una «equazione differenziale», si viene con essa a definire quella porzione di spazio, quel «campo», in ogni suo punto perchè per ognuno di essi si può far passare una curva rappresentativa della funzione differenziale che compare nell'equazione. Con ciò l'equazione differenziale viene «risolta» e l'integrale che ne risulta fornisce lo «stato fisico» in ogni punto del campo dal momento in cui se ne sono determinate le costanti. Ma questo sia detto solo di passata.

Ora noi abbiamo visto che ci sono infinite «curve integrali» le quali non differiscono che per una costante. Se avessimo per es. da integrare la funzione $y' = \frac{x}{2}$, noi otterremmo come sue curve integrali tutte le:

$$F(x) = \int \frac{x}{2}\,dx \pm C = \frac{x^2}{4} \pm C.$$

Ora ogni integrale definito tra i valori a e b sarebbe

$$\frac{1}{2}\int_a^b x\,dx = \left[\frac{b^2}{4} \pm C\right] - \left[\frac{a^2}{4} \pm C\right] = \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$

e poichè ogni $\frac{x^2}{4} \pm C = F(x) = y$, cioè rappresenta l'ordinata y della curva integrale, l'integrale definito

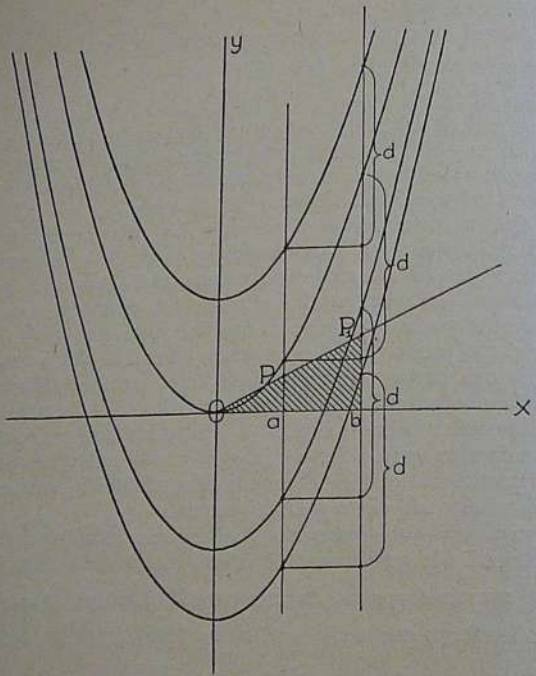


Fig. 62

$\frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}$ rappresenterà la differenza fra due ordinate determinate della curva integrale: e precisamente la differenza fra la prima (ordinata iniziale) e l'ultima (ordinata finale) ordinata della curva nel campo d'integrazione a — b prescelto. Chiariamo la cosa con una rappresentazione grafica. Disegniamo tanto la funzione da integrare $y' = \frac{x}{2}$ quanto un numero qualunque di

curve integrali $y = \frac{x^2}{4}$ ee C. Il campo d'integrazione sia quello fra a e b (fig. 62).

Come si vede subito, la superficie di cui va calcolata l'area è quella compresa fra i triangoli OP_1b e OPa. Questa differenza di aree dev'essere eguale alla differenza delle relative ordinate di una qualunque delle curve integrali; cioè il valore assoluto di questa differenza. Ora appare chiaramente dalla figura che queste differenze di ordinate sono eguali per tutte le curve integrali, cosicchè il valore dell'integrale definito è effettivamente indipendente dalla costante dell'integrale indefinito, sia essa positiva o negativa.

Abbiamo anche parlato di una « curva differenziale ». Riprendiamo allora il nostro primo esempio della funzione $y = x - x^2$ il cui integrale è

$$F = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C.$$

Nel trattare del problema del valore massimo della curva rappresentata da questa funzione, ci eravamo formata una terza funzione: $\frac{dy}{dx} = f'(x) = y' = 1 - 2x$ che naturalmente potremo anche rappresentare con una curva. Così siamo in possesso ora di tre curve: la curva della funzione $y = x - x^2$, la curva integrale di questa $\left(F = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$ - se prendiamo $C = +1$ - e la curva differenziale $y' = 1 - 2x$ della medesima prima curva. Tracciamo ora le ordinate di queste tre curve per l'ascissa $x = 0{,}4$ (fig. 63): naturalmente si sarebbe potuto tracciare le curve, ma lasciamo al lettore di farlo su carta millimetrata.

In corrispondenza di $x = 0{,}4$ le ordinate sono:

quella della curva data : $y = 0{,}24$
» » » integrale : $F = 1{,}0587$
» » » differenziale : $y' = 0{,}2$.

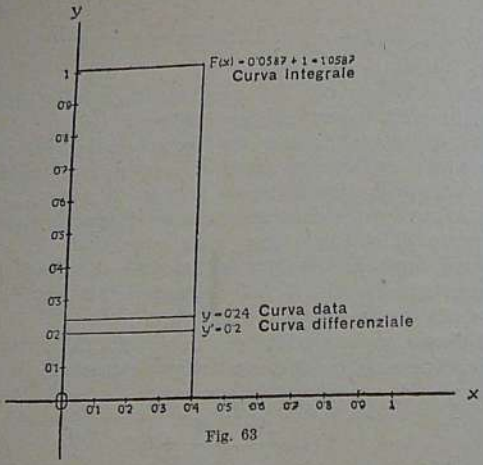


Fig. 63

E ora cerchiamo di fare la curva differenziale della curva integrale. Poichè

$$F = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 1$$

$$\text{sarà } \frac{dF}{dx} = 2.\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{3}x^2 = x - x^2:$$

ritroviamo cioè con nostra sorpresa la funzione dalla quale siamo partiti. Facciamo ora l'opposto: integriamo la curva differenziale $y' = 1 - 2x$. Avremo:

$$\int (1 - 2x)\,dx = \int 1 \cdot dx - 2\int x dx =$$

$$= \frac{1}{0+1}x^{0+1} - 2\frac{1}{1+1}x^{1+1} = x - x^2.$$

Cioè precisamente la funzione di partenza con l'aggiunta di una costante $C = 0$.

Tutto il meccanismo ci appare ora svelato, come quando si apre una scatola d'ingranaggi e si vede il funzionamento dei ruotismi in esso.

Capitolo XXXIV

ALTRI PROBLEMI DI QUADRATURA

Dopo queste constatazioni, che purtroppo non possiamo spingere più in là, proviamoci a collaudare il nostro algoritmo dell'integrale in un caso limite. Ci si perdoni il bisticcio ma vogliamo esaminare la quadratura del quadrato e ciò con la scorta del calcolo integrale. La «curva» che delimita il nostro quadrato è naturalmente qui una retta, parallela all'asse delle ascisse che ne dista di una quantità a pari al lato del quadrato stesso.

L'equazione di questa retta si scrive: $y = a$ o, per ficcarci dentro una x, $y = a\,x^0$. Per ottenere l'area del quadrato dobbiamo integrare questa funzione entro i limiti $x = 0$ e $x = a$. Scriviamo dunque:

$$F = \int_0^a ax^0 dx = a\int_0^a x^0 dx.$$

L'integrale indefinito ci dà:

$$\int ax^0 dx = a\,\frac{1}{0+1}\,x^{0+1} \pm C = ax \pm C.$$

L'integrale definito sarà quindi:

$$F = (a \cdot a \pm C) - (a \cdot 0 \pm C) = a^2 - 0 = a^2.$$

Così abbiamo ottenuto l'area del quadrato con una integrazione. La curva integrale dell'area del quadrato sarà una retta di equazione: $F = ax \pm C$.

Allo stesso modo possiamo giungere all'area del ret-

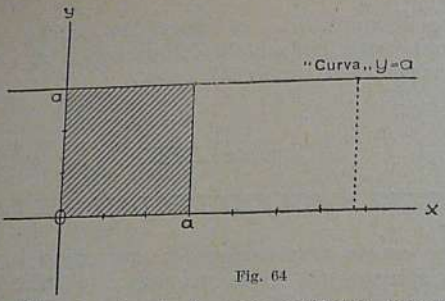


Fig. 64

tangolo. Fermo restando l'a come ordinata, integriamo fra $x = 0$ ed $x = b$, avremo:

$F^{ab} = \int_o^b ax^0 dx = (a \cdot b \pm C) - (a \cdot 0 \pm C) = ab - 0 = a \cdot b.$

Si osservi di passata che possiamo avere l'area di un quadrato solo se per un ordinata $y = a$ prendiamo la $x = a$: per ogni altro valore di x avremo l'area di un rettangolo.

Controlliamo ora col calcolo integrale la quadratura del segmento di parabola che abbiamo eseguita col metodo di Archimede al capitolo ventesimo ottavo.

Generalmente nei testi scolastici si dà come equazione della parabola la funzione $y = \sqrt{2px}$ od $y^2 = 2px$ ma questa non è l'espressione più semplice dell'equazione della parabola, ma una cosidetta «funzione inversa». Se diamo al «parametro» p il valore $\frac{1}{2}$ l'equazione qui sopra si trasforma nella $y^2 = x$ o nella $y = \sqrt{x}$.

Secondo le regole della teoria delle funzioni e della geometria analitica, lo scambio della x con la y come variabile indipendente (cioè lo scambio delle ascisse con le ordinate nel piano cartesiano), non rappresenta altro che la rotazione di 90° della curva rappresentativa della funzione, nel piano del disegno. La parabola $y^2 = x$ ha il diametro orizzontale; la parabola $x^2 = y$ (o $y = x^2$). ha il diametro verticale.

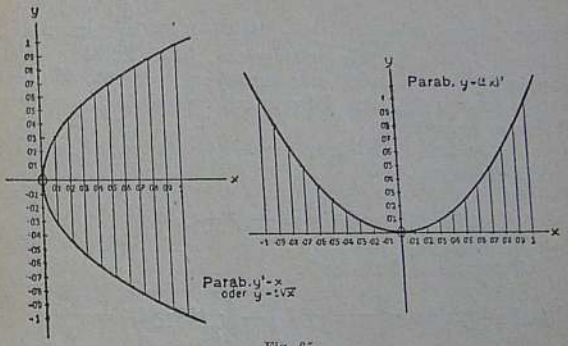


Fig. 65

La seconda curva si chiama allora l'inversa della prima (fig. 65) e le funzioni che le rappresentano, « funzioni inverse ». Ciò di passata, per tacitare possibili scrupoli, quando più avanti considereremo la funzione $y = x^2$ per così dire, funzione della parabola originaria.

Nello stesso modo di Archimede, inscriviamo un triangolo nel mezzo segmento S di parabola (fig. 66).

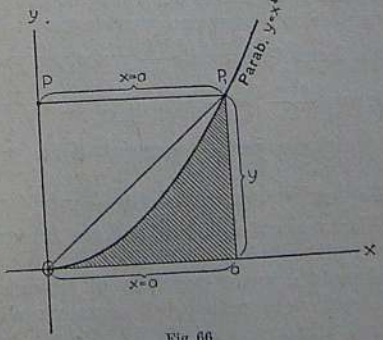


Fig 66

Col calcolo integrale ci accingeremo a determinare l'area della superficie tratteggiata, fra i limiti $x = 0$ ed $x = a$, che è manifestamente il complemento al rettangolo $x \cdot y$ dell'area del segmento parabolico che vogliamo trovare.

La funzione della curva è $y = x^2$ e l'integrale indefinita di questa è

$$F = \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \pm C.$$

L'integrale definito sarà:

$$F_{(o,a)} = \int_o^a x^2 dx = \left(\frac{1}{3} a^2 \pm C\right) - \left(\frac{1}{3} 0^2 \pm C\right) = \frac{a^3}{3}$$

L'area del segmento di parabola sarà dunque $ay - \frac{a^3}{3}$ e poichè $y = x^2$ $\quad ax^2 - \frac{a^3}{3}$ e per $x = a$

$$a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^3.$$

Archimede però non ha eseguito la sua quadratura in unità a, ma in triangoli inscritti: dobbiamo dunque ancora determinare l'area del triangolo inscritto OP_1P che in quel calcolo avevamo preso come area unitaria. Quest'area è manifestamente $\frac{1}{2} y \cdot a$ e per $y = x^2 = a^2$, l'area diventa $\frac{a^2 \cdot a}{2} = \frac{a^3}{2}$. Poi Archimede aveva moltiplicato quest'area per $\frac{4}{3}$ (somma della progressione decrescente $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots$) quindi $\frac{a^3}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3} a^3$ come abbiamo trovato noi col calcolo integrale in un modo assai più spiccio.

Naturalmente è anche possibile di trovare la stessa area, col calcolo integrale per il segmento di parabola disposto nel primo verso della fig. 65; ma lasciamo al

lettore questo problema dovendo ormai avviarci alla conclusione.

Abbiamo sufficiente pratica di calcolo integrale da poter considerare il caso della funzione $y = \frac{1}{x}$ ossia $y = x^{-1}$ che rappresenta una curva congenere alla parabola cioè l'iperbole, importantissima in Fisica: essa si traccia facilmente in assi cartesiani, portando come ordinate i valori reciproci delle ascisse. Noteremo che per $x = 0$ sarà $y = \frac{1}{0}$ cioè il punto va all'infinito sull'asse delle ordinate: così pure per $y = 0$ $x = \frac{1}{0}$ e il punto di ordinata zero va pur esso all'infinito sull'asse delle x. I geometri dicono allora che la curva è «assintotica» rispetto agli assi coordinati, cioè li taglia solo «all'infinito». Questa espressione non vuol dire altro che questo: per valori crescenti tanto di x che di y i due rami della nostra iperbole vanno sempre più avvicinandosi agli assi senza toccarli mai. (Ricordate la definizione delle parallele che s'incontrano all'infinito: lo stesso concetto matematico è usato per i rami della iperbole).

E qui una piccola digressione geometrico storica. Cerchio, ellisse, parabola e iperbole sono quattro curve di secondo ordine che hanno avuto una grande importanza nella storia della geometria: esse si ottengono come le quattro sezioni di un cono: normale all'asse (cerchio); obliqua all'asse (ellisse); parallela alla generatrice del cono (parabola) e finalmente parallela all'asse del cono (iperbole equilatera): le due prime curve sono chiuse le due ultime aperte (fig. 67). Apollonio di Perga, che già abbiamo imparato a conoscere, studiò queste curve già nel terzo secolo A.C. e ne scrisse otto volumi nel suo trattato sulle coniche: non rivendica a sè nessuna priorità ma riassume quanto in proposito già inse-

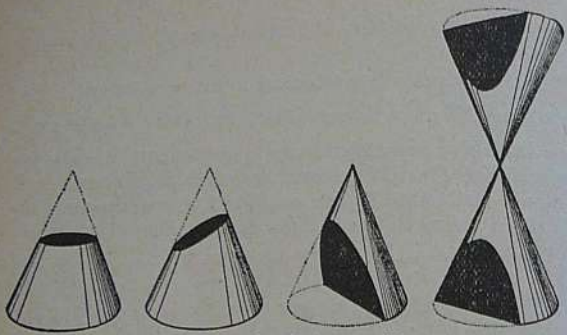


Fig. 67

gnava Euclide. Fu però Apollonio che trovò i nomi di «parabola, ellisse e iperbole». Il sedicenne Biagio Pascal, autodidatta di genio, aveva già da sè, riscoperto tutte le

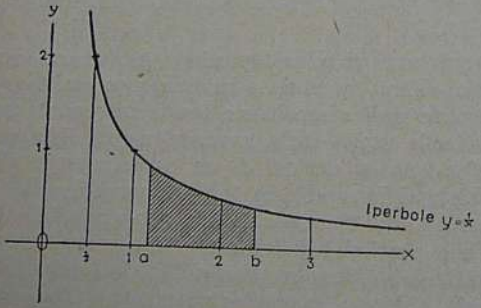


Fig. 68

proprietà delle coniche sulle quali pubblicò un trattato a 17 anni. «Essai sur les coniques».

Non si potrà più dire che queste curve non sieno interessanti.

Ma torniamo alla nostra iperbole: il diagramma della fig. 68 ci mostra come si possa fare la quadratura anche di un tratto di ramo d'iperbole. L'area della superficie tratteggiata, limitata fra le ascisse $x = a$ e $x = b$ è assai facile a calcolarsi dalla funzione $y = \frac{1}{x}$ che rappresenta la curva che la limita superiormente.

Come al solito calcoliamo prima l'integrale indefinito

$$F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \frac{1}{1-1} x^{1-1} \pm C.$$

Presto scritto, seguendo la solita regoletta, ma... quale risultato disastroso! Otteniamo

$$\frac{1}{0} x^0 = \frac{1}{0} \times 1 = \infty .$$

Peggio ancora per l'integrale definito che darebbe:

$$(\infty\, b^0 \pm C) - (\infty\, a^0 \pm C) = \infty - \infty = 0.$$

Non abbiamo ancora mai inciampato in simili assurdità. Eppure il disegno parla chiaro: la quadratura dev'essere possibile. Cerchiamo ancora in un formulario: la formola che riassume la regola di integrazione è giusta; solo c'è tra parentesi un nuovo segno, che non conoscevamo ancora. Sta scritto:

$$\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \left[m \neq -1\right].$$

Cos'è questo $\neq$? Semplicemente quello che è tracciato: il segno di eguaglianza «cassato» cioè «non uguale» a -1. La nota tra parentesi quadre sta a significare che la formola vale per qualunque m eccetto che per $m = (-1)$. Quel maledetto -1 ci fa lo stesso scherzo del suo congenere $i = \sqrt{-1}$.

Ho appositamente portato il lettore pari pari fino all'orlo del precipizio per dargli la sensazione del « brivido ».

E questo brivido l'hanno provato, e come, i primi scopritori del calcolo integrale.

Nell'algoritmo del calcolo integrale s'era aperto un crepaccio che ha dato parecchio da fare ai primi alpinisti. Ci fu chi gridò al fallimento del calcolo integrale (come ora si parla del fallimento della Fisica) oppure considerò questo come uno scandalo. E noi, tardi epigoni, siamo in grado di goderci la sorpresa di chi si affaccia all'orrido crepaccio per la prima volta !

Possediamo per fortuna la chiave magica e pronunciamo una parola che sa di magia e di cabala: «Logaritmo ».

Affrontiamo ancora questo mistero, per quanto lo scopo del libro sia ormai raggiunto e colmiamo questa lacuna nelle regole del calcolo integrale. Ma vediamo prima che cosa è un logaritmo.

Capitolo XXXV

LOGARITMI

Dalle alture alle quali siamo saliti, guardandoci attorno, vediamo tutto un panorama di operazioni di calcolo, nelle quali distinguiamo:

Operazioni costruttive o *tetiche*	Operazioni di separazione o *litiche*
1 Addizione	Sottrazione
2 Moltiplicazione	Divisione
3 Elevazione	Estrazione di radice
4 —	—
5 Integrazione	Derivazione.

Perchè quel vuoto al N° 4? Che cosa c'è dietro quella nebbia che ce lo nasconde alla vista? Lì ci sta la regione degli esponenziali e dei logaritmi, ci dice la nostra guida.

E anzitutto un po' di filologia: Logaritmo ha una certa assonanza con algoritmo, ma non ne ha la stessa origine. Per quanto derivi da una parola greca composita « logos » « aritmos » (rapporto razionale) essa è relativamente moderna.

Dobbiamo questo metodo di calcolo che ha raddoppiato la velocità delle operazioni ad astronomi ed ingegneri, al tedesco Michele Stifel ed a Nepero o Sir John Napier, matematico scozzese (1550-1617), che fu anche un valido sostenitore del sistema decimale.

Ma non ci perdiamo in reminiscenze storiche per quanto interessanti e accingiamoci a salire l'ultimo spuntone di roccia che vinceremo con la stessa sicurezza dei precedenti.

Risulta evidente che dalla potenza si possono ricavare due tipi diversi di funzioni: il primo sul quale abbiamo finora operato è rappresentato da una funzione y la cui variabile x è elevata ad un esponente qualunque n costante. Sono queste le funzioni « potenze » la cui operazione reciproca sono le radici o potenze in cui l'esponente è una frazione pura $\frac{1}{n}$.

Queste funzioni $y = x^{\frac{1}{n}}$ si possono scrivere anche nella forma inversa $y^n = x$ o $y = \sqrt[n]{x}$.

Ora si può facilmente immaginare un tipo di funzione in cui la variabile sia l'esponente stesso, cioè una funzione come: $y = a^x$.

Nasce quindi la domanda: che cosa ottengo quando elevo una costante ad una potenza incognita? Anzitutto diamo un nome a questo tipo di funzione: la diremo « funzione esponenziale » o semplicemente « esponenziale » e per averne una idea chiara facciamo un

esempio comparativo con la funzione « potenza ». Scegliamo nei due casi dei valori concreti per es. 1, 2, 3 e 4 per la variabile e riteniamo la costante $a = 5$. Avremo per la potenza:

$$y = x^n \quad y = 1^5 = 1 \; ; \; y = 2^5 = 32 \; ; \; y = 3^5 = 243$$
$$\text{ed } y = 4^5 = 1024$$

invece per la esponenziale avremo :

$$y = a^x \quad y = 5^1 = 5 \; ; \; y = 5^2 = 25 \; ; \; y = 5^3 = 125$$
$$\text{ed } y = 5^4 = 625.$$

Ora è chiaro che nel primo caso, dal valore particolare $y = x^5 = 1024$ della funzione $y = x^n$ possiamo ricavare la x con una estrazione di radice quinta:

$$x = \sqrt[5]{1024} = 4.$$

Per l'esponenziale, la contro operazione od operazione reciproca, va impostata in altro modo. Dobbiamo chiederci qui: a quale potenza devo io elevare la costante nota, 5, per ottenere $y = 125$?

Inutile scrivere $\sqrt[x]{125}$: questo non ci dice nulla, perchè non c'è nessuna operazione che ci permetta di estrarre la radice x di un numero dato. In alcuni casi semplici potremmo procedere per successivi tentativi. Ma facciamo un caso speciale e proviamo a vedere a quale potenza dovremmo elevare il 10 per ottenere 2 come valore di 10^x: ci renderemo conto della totale incapacità in cui ci troviamo di risolvere questa funzione esponenziale pur tanto semplice, almeno per quanto concerne l'operazione litica. Alla quale risponde il « logaritmo » che ci dice che: quando si ha $y = a^x$ allora la incognita x è il logaritmo di y riferito alla costante o alla « base » a. L'operazione si indica col simbolo $x = \log_a y$ o a parole « logaritmo in base a di y. Anche questa funzione am-

mette la sua inversa: $y = \log_a x$, che risponde alla domanda: « a quale potenza y devo io elevare la base a per ottenere un x scelto ad arbitrio? » O nel caso sopra ricordato della base 10: a quale potenza x devo elevare il 10 per ottenere per y il valore 2?

Oppure ancora, analiticamente; Quale ordinata corrisponde ad un ascissa 2 sulla curva rappresentativa della funzione esponenziale $y = \log_{10} x$? Riveliamolo fin d'ora: nel caso in quistione:

$$y = 0{,}30103 \quad = \log_{10} 2 \text{ oppure } 10^{0{,}30103} . = 2.$$

Completiamo ora il nostro specchietto e affermiamo quanto segue:

Operazioni tetiche	*Operazioni litiche*
1ª Addizione (a+b+c...)	Sottrazione (a=b—c...)
2ª Moltiplicazione (a·b·c...)	Divisione a : b : c...
3ª Elevazione potenza (a^a)	Estrazione di radice ($\sqrt[y]{a}$)
4ª Esponenziale (a^x)	Logaritmo ($\log_a x$)
5ª Integrazione $\int f'(x)dx$	Derivazione $\left[\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)\right]$

Ma fin qui non abbiamo fatto che la sola conoscenza del comando: Logaritmo; ma ancora non sappiamo come eseguirlo: non conosciamo ancora il procedimento da seguire: l'Algoritmo del Logaritmo.

Per rendercene padroni, dobbiamo premettere due osservazioni: i Logaritmi sono in generale numeri irrazionali, a meno che non si tratti di logaritmi di potenze della base. Il loro calcolo materiale è lungo e difficile e ci porterebbe oltre ai limiti che ci siamo imposti. Ma ci troviamo nella felice posizione di procurarci per pochi soldi delle cosiddette Tavole di Logaritmi le quali contengono, già computati, i logaritmi di tutti i numeri di che potremmo aver bisogno; anzi, persino i logaritmi delle funzioni angolari. Quando avremo appreso a farne uso, potremo noi eseguire in pochi secondi delle elevazioni a potenza o delle estrazioni di radice che ci richiedereb-

bero giornate di computi pazienti per ricavarle nel modo solito. Anzi l'ingegnere porta in tasca un certo « Regolo logaritmico » col quale può, anche senza carta e matita, eseguire lì, su due piedi, calcoli sovente complicati.

Non è qui il luogo d'insegnare l'uso nè delle tavole nè del regolo logaritmico: basti ricordare che, per mezzo dei logaritmi, la moltiplicazione si riduce ad una somma, la divisione ad una differenza, la elevazione a potenza ad una moltiplicazione e l'estrazione di radice ad una divisione.

Come « base » di un sistema logaritmico, cioè come costante a, si potrebbe prendere un numero qualunque. In pratica si sceglie la base 10 (logaritmi decimali o comuni o di Brigg) oppure la base $e = 2{,}7182818\ldots$ (Logaritmi naturali o neperiani). La prima è usata nei calcoli tecnici e computistici, la seconda nei calcoli astronomici e fisici. Per distinguere i due sistemi si ricordi che dove non è indicata la base si intende base decimale quando si scrive log x, o Log x con la maiuscola; s'intende invece la base e quando si scrive ln x (*l*ogaritmo *n*aturale).

Naturalmente vale anche nelle equazioni la regola che il valore della equazione non varia quando si ricavi il logaritmo di entrambi i termini. Così:
Se $c = d$ sarà pure $\log_a c = \log_a d$ e viceversa.

La seconda operazione da imparare ad eseguire è la ricerca del « numero » dato che sia il logaritmo di esso. Operazione che si chiama anche di « delogaritmizzazione » se vi piacciono le parole difficili.

Come proprietà fondamentale dei logaritmi vale la relazione:

$$\log_a (c \cdot d) = \log_a c + \log_a d ,$$

cioè il fatto, già sopra accennato, che il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori. Ricaviamo logicamente questa proprietà: quando

avessimo due logaritmi di base a, per es.: $\log_a b = B$ e $\log_a c = C$ sarà, per il modo in cui si formano i logaritmi (funzione esponenziale), $b = a^B$ e $c = a^C$. Difatti il logaritmo non è altro che la potenza alla quale devo elevare la base a per ottenere il «numero» b o c. Ma se $b = a^B$ e $c = a^C$ sarà naturalmente: $b \cdot c = a^{B+C}$. E se guardo bene questa espressione, vedo che posso ricavarne un nuovo logaritmo di base a cioè $\log_a (b \cdot c) = B + C$; poichè $B + C$ è l'esponente al quale devo elevare a per ottenere il prodotto $b \cdot c$, cioè è il logaritmo di $(b \cdot c)$. Mettendo al posto di A e di B il valore che essi rappresentano, avremo:

1ª $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

Le altre regole logaritmiche si possono ricavare in modo analogo. Basta per noi qui di annunciarle.

2ª $\log_a \frac{c}{d} = \log_a c - \log_a d$ (divisione di logaritmi)

3ª $\log c^d = d \times \log c$ (elevazione a potenza)

4ª $\log \sqrt[d]{c} = \frac{1}{d} \log c$ (estrazione di radice).

Il lettore perspicace avrà già notato come la quarta regola derivi dalla terza.

Dopo questo nostro rapido orientamento nel campo dei logaritmi, il lettore studioso potrà con la lettura delle istruzioni premesse alle Tavole dei Logaritmi e con parecchio esercizio assiduo, rendersi padrone di questo nuovo mezzo di calcolo come lo è ogni buon navigatore.

E noi ci rivolgeremo di nuovo al centro di tutta la matematica superiore, a quell'asse attorno al quale tutto il calcolo integrale e differenziale si muove, cioè a quella base e dei logaritmi naturali.

Non è necessario che ricordiamo che per questi logaritmi valgono tutte le regole esposte qui sopra per i logaritmi in generale.

Ma come un « gendarme » nella nostra ascesa alpina, ecco presentarsi, improvvisamente un problema serio. Un qualsiasi valore di una grandezza, prendiamo il valore più semplice : 1, dovrebbe crescere di una quantità estremamente piccola, diciamo di $\frac{1}{n}$, dove n dovrebbe essere enormemente grande.

Ora questo 1 incrementato di $\frac{1}{n}$ dovrebbe ancora crescere in modo organico, cioè dovrebbe continuare a svilupparsi a questo stesso modo e ciò fino all'infinito. Ma ciò non può essere, mi obbietta, il mio scolaro più diligente, perchè questi continui incrementi, sempre più piccoli dànno luogo ad una serie convergente di termini, che ha un valore finito.

Abbiamo già incontrato nella serie di Archimede

$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots\right)$$

una siffatta serie convergente di infiniti termini dal valore finito

$$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

E così anche la serie di Leibnitz e tutte le progressioni geometriche decrescenti.

Guardiamo un po' attentamente che cosa succede del nostro 1 che va sviluppandosi per gradi infinitesimi: Sembra che esso abbia ricevuto il comando biblico: « cresci, moltiplicati e riempi la terra ».

Se dunque 1 cresce di $\frac{1}{n}^{mo}$ infinitamente piccolo, ne deriva $1+\frac{1}{n}$, che provvisoriamente indicheremo con a ; allora a deve crescere analogamente. Il che vuol dire che a deve accrescersi a sua volta della più piccola parte

di sè stesso, cioè di $\frac{a}{n}$: di qui risulta $\left(a+\frac{a}{n}\right)$, che noi chiameremo b. Andiamo avanti e formiamo $\left(b+\frac{b}{n}\right)$ che chiameremo d e così via.

E ora vediamo che cosa dà tutto questo: noi avevamo supposto $\left(1+\frac{1}{n}\right)=a$, allora sarà:

$$\left(a+\frac{a}{n}\right)=\frac{a\,n+a}{n}=a\,\frac{n+1}{n}=a\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=a\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

$$\left(b+\frac{b}{n}\right)=\frac{b\,n+b}{n}=b\,\frac{n+1}{n}=$$

$$=b\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)=b\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

e ricordando che b non è altro che $\left(a+\frac{a}{n}\right)$ e che questa espressione è uguale ad $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$, sarà:

$$\left(b+\frac{b}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\times\left(1+\frac{1}{n}\right) \text{ cioè } \left(1+\frac{1}{n}\right)^3.$$

E poichè possiamo continuare questo calcolo quanto ci pare, noi vediamo che questo « accrescimento organico » ci dà per successivi gradini prima $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ poi nel gradino appresso $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$, poi per il terzo gradino $\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$ e così avanti.

La legge di formazione si può esprimere con la forma generale, per l'n^{esimo} gradino con $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Posso allora scegliere questo esponente n grande quanto voglio e sviluppare il binomio $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ secondo la nota serie del binomio di Newton. E poichè tutte le potenze di 1 danno sempre 1, posso tralasciare di scriverle ogni qualvolta compaiono come fattore:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1^n + \binom{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right) + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 +$$

$$= 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots.$$

Se ora si prende per n un valore enorme qualunque, tutti i minuendi -1, -2, -3 delle parentesi, diventano trascurabili di fronte ad n, cosicchè la serie del binomio diventa:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n^2}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n^3}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \frac{n^4}{4!}\cdot\frac{1}{n^4} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots$$

Ora di quest'ultima serie convergente alla quale siamo giunti, quello che c'interessa è la somma dei termini: la quale sarà certamente maggiore di 2, somma dei due primi termini interi.

Se eseguissimo la somma per un sufficiente numero di termini troveremmo il numero

$$2{\cdot}71828182845904\ldots$$

che già conosciamo sotto il simbolo di e, cioè sarà:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

da cui, per quanto si è detto poco sopra, si può fare

$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x = e^x = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$$

dove n può avere un valore qualunque.

Prendendo l'esponente nx come un esponente unico, per es. $n\,x = m$, potremo scrivere per $\left(1+\frac{1}{n}\right)^m$ una serie come quella ora scritta. Ma manteniamo il prodotto $n \cdot x$ e avremo:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1^{nx} + \binom{nx}{1}\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \binom{nx}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \binom{nx}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 +$$

$$= 1 + \frac{nx}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n\,x\,(nx-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{n\,x\,(n\,x-1)\,(n\,x-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \dots$$

Supponiamo ancora come precedentemente n enormemente grande e allora potremo scrivere:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + \frac{n\,x}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n^2x^2}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n^3x^3}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \dots$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Questa serie si chiama la « serie esponenziale » ed ha come valore, per quanto visto sopra:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Deriviamo, con le note regole ciascun termine di questa serie, troveremo

$$\frac{de^x}{dx} = 0 + \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{2x}{1 \cdot 2} + \frac{3x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} +$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

cioè la funzione stessa e^x ! Questa è una particolarità della funzione esponenziale che ci fa comprendere perchè abbiamo poc'anzi affermato essere il numero e l'asse su cui s'impernia tutta la matematica superiore.

La funzione e^x *è la sola funzione la cui derivata riproduca la funzione stessa* e quindi il cui integrale è ancora sempre e^x .

Si comprenderà anche quale enorme semplificazione risulti nei calcoli quando si riesca ad esprimere una grandezza come potenza di e.

Avendo spiegato il valore della base e dei logaritmi naturali e della funzione esponenziale che con questa « base » si forma, torniamo alla funzione logaritmica che, in base e si scrive:

$$y = \log_e x = \ln x.$$

Se y è il logaritmo e^{esimo} di x, allora sarà $e^y = x$ che non è che un altro modo di esprimere la stessa cosa. Con questa operazione noi abbiamo scambiato le variabili, cioè abbiamo formata la funzione inversa della precedente. Facciamo ora la derivata di questa funzione inversa; troveremo naturalmente:

$$\frac{dx}{dy} = e^y \text{ cioè di nuovo } x.$$

perchè se due grandezze sono eguali ad una terza esse sono necessariamente uguali fra di loro. Se volessimo

trovare il valore non di $\frac{dx}{dy}$ ma di $\frac{dy}{dx}$ non abbiamo che da ricordare che l'una espressione è la reciproca dell'altra.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \text{ ma } \frac{dy}{dx} = x \text{ quindi } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Con questo lungo giro di trasformazioni, perfettamente giustificate, siamo giunti alla conclusione sorprendente che $\frac{1}{x}$ è la derivata $\frac{dx}{dy}$ della funzione logaritmica $y = \log_e x$ a base e. Ma $\frac{1}{x}$ si può scrivere anche x^{-1} ed eccoci ad aver trovato una derivata che non ci poteva esser data dalla regola generale della derivazione delle potenze: $n\,x^{n-1}$. Poichè la derivata di x^3 è $3\,x^2$, quella di x^2 è $2\,x$ quella di x^1 è $1 \cdot x^0$, quella di x^0 è $0 \cdot x^{0-1} = 0$ perchè $x^0 = 1$ e la derivata di una costante è nulla. E allora ? Andiamo ancora avanti oltre l'esponente zero, verso gli esponenti negativi: La derivata di x^n per $n = -1$ dà

$$\frac{dy}{dx} = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}.$$

Nessuna meraviglia che nell'integrazione c'era una lacuna nella regola generale

$$\frac{1}{m+1} x^{m+1} \text{ per } m = -1.$$

Poichè noi sappiamo che il termine integrando, cioè quello che sta sotto al segno $\int$ è sempre la derivata di una funzione $F(x)$. E noi non conoscevamo allora nessuna funzione la cui derivata fosse x^{-1} ed eravamo nell'impossibilità di eseguire la quadratura dell'iperbole equilatera che ha per equazione appunto

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Ora l'enigma è risolto; la funzione cercata di x^{-1} è $y = \log_e x$ e allora:

$$F(x) = \int_a^b x^{-1}\,dx = \int_a^b \frac{dx}{x} = \int_a^b y'\,dx$$

e questa funzione integrale della derivata y' non è altro che $y = \log_e x$, perciò l'integrale indefinito di x^m per $m = -1$ è $F(x) = \int x^{-1}\,dx = \log_e x \pm C$ e quello definito fra a e b:

$$F_{(a,b)} = \int_a^b x^{-1}\,dx = (\log_e b \pm C) - (\log_e a \pm C) = \ln b - \ln a.$$

Per le proprietà dei logaritmi sono qui possibili altre trasformazioni: si può per es. scrivere al posto di $(\ln b - \ln a)$ semplicemente $\ln \frac{b}{a}$. Se si volesse per es. integrare fra a ed a^2 anzichè fra a e b si avrebbe

$$\int_a^{a^2} x^{-1}\,dx = \ln \frac{a^2}{a} = \ln a.$$

Possiamo ancora fare questo: nell'integrale indefinito $\int x^{-1}\,dx = \ln x + c$ possiamo scrivere

$$= \ln x + \ln c = \ln x\,c$$

considerando la costante che può essere un numero qualunque come il logaritmo di un numero c.

Aggiungiamo, per finire, questo: che si può naturalmente passare da un sistema di logaritmi ad un altro. In alta matematica, lo si è già detto, finchè i calcoli hanno carattere di grande generalità, si adoperano i logaritmi naturali o neperiani e la ragione, di semplicità, l'abbiamo esposta.

In pratica però nei calcoli tecnici, nautici ed attuariali si adoperano le tavole di Logaritmi comuni a base decimale e per passare da quelli a questi si divide per un numero o divisore fisso detto «modulo»

$$m = 0{,}4342944819\ldots$$

Così

$$\log_e x = \ln x = \frac{1}{m} \log_{10} x.$$

e inversamente

$$\text{Log}_{10} x = m \ln x.$$

Cerchiamo ancora di rappresentarci graficamente la funzione logaritmica $y = \log_e x$.

Poichè il logaritmo di 1 è zero in qualunque sistema e poichè x dev'essere eguale a e^y ed una potenza unità si ha solo elevando la base all'esponente 0, così la curva logaritmica taglierà l'asse delle ascisse all'ascissa $x = 1$ essendo $y = 0$. Per $x = e$ sarà $e^y = x$ ed $y = 1$: così per $x = e^2$ sarà $y = 2$; per $x = e^3$ sarà $y = 3$ e così via.

In generale in tutti i sistemi il logaritmo della base è $= 1$ e il logaritmo di una potenza qualunque della base è l'esponente della base stessa, il che risulta dalla definizione:

$$y = \log_a x \quad a_y = x.$$

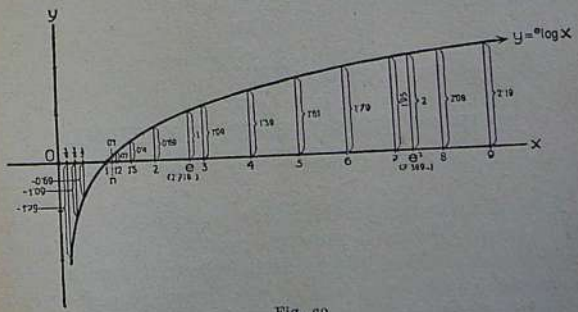


Fig. 69

Così il logaritmo decimale di 1 è zero, quello di 10 è 1, quello di 100 è 2, quello di 1 milione: Log 1 000 000 = 6 (cioè è rappresentato dal numero di zeri che segue l'unità);

quello di $\frac{1}{10}$ cioè di 10^{-1} è -1 quello di $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$ è -3 e così via.

Per tutti i numeri compresi fra 0 e 10 e fra le potenze intere del 10 si hanno per logaritmi dei numeri irrazionali: frazioni decimali per i numeri compresi fra 1 e 10, come

$$\log_{10} 3 = 0{,}4771$$

o nei logaritmi naturali per i numeri compresi fra 1 ed $e = 2{\cdot}71828$ come $\ln 2 = 0{,}6931$.

Nei logaritmi decimali dei numeri superiori al 10 si ha un numero decimale costituito dal logaritmo della potenza del 10 che si considera, seguito da una frazione decimale, dopo la virgola, che rappresenta un resto e che dal latino si chiama « mantissa » (da mantissa = resto). La cifra che figura prima della virgola e che ha il significato ora detto, si chiama la « caratteristica ».

Per ogni altro chiarimento, qualsiasi libro di tavole di Logaritmi darà tutte le informazioni che si possono ancora desiderare.

Capitolo XXXVI

INTERPOLAZIONI, ESTRAPOLAZIONI. CONCLUSIONE

Nella pratica della matematica, nella ricerca dei Logaritmi nelle Tavole si presenta sovente il problema di dover calcolare valori intermedi, in quanto naturalmente, in queste Tavole, per estese che sieno, non si trova tutta la infinita serie dei numeri. Questa ricerca di valori intermedi a valori noti, viene chiamata dai matematici « Interpolazione ». E poichè questo concetto è di enorme importanza in Matematica, in Fisica e soprat-

tutto nella Statistica matematica, giova fermarcisi alquanto a considerarlo. La difficoltà del problema, la cui soluzione forma una Scienza a sè, è tale che non possiamo che esaminarlo nel suo insieme. Si può interpretare un valore d'interpolazione tanto geometricamente che aritmeticamente: in aritmetica un numero interpolato è il valore che acquista il numero fra due valori noti: non un valore qualunque intermedio, ma un valore che occupa una determinata « posizione » nell'intervallo fra i due numeri noti. Se per es. il logaritmo di 1499 è 3·17580 e il logaritmo del numero intero successivo 1500 è 3·17609, potrebbe interessarmi di conoscere il logaritmo di 1499,5 che non trovo nelle Tavole a cinque decimali. A buon senso, direi che poichè 1499,5 sta esattamente frammezzo a 1500 e 1499, anche il suo logaritmo dovrebbe essere la media aritmetica fra i due anzidetti logaritmi, arrotondata nell'ultima cifra in più o in meno secondochè questa è maggiore o minore di 5.

In modo analogo si potrebbe interpolare il logaritmo di 1499.8 dividendo la differenza fra i due logaritmi noti in dieci parti e prendendone 8 che si aggiungono al logaritmo di valore più basso.

La differenza suddetta è $3 \cdot 17609 - 3 \cdot 17580 = 0 \cdot 00029$ e un decimo di essa è 0.000029, perciò il logaritmo di 1499.8 sarebbe uguale al logaritmo di 1499 più otto decimi di questa differenza il che dà:

$$3 \cdot 17580 + 8 \times 0 \cdot 000029 = 3 \cdot 17603.$$

A questo modo si procede nelle tavole logaritmiche per interpolazione mediante le cosidette P.P. (parti proporzionali) segnate in specchietti a margine di ogni facciata; che non sono altro che i decimi d'intervalli suaccennati. Questo presume ad ogni modo una premessa sostanziale che non richiede un rigore estremo ed è che l'interpolazione è considerata come « lineare » (questo è il significato vero di P.P.) mentre, come abbiamo visto

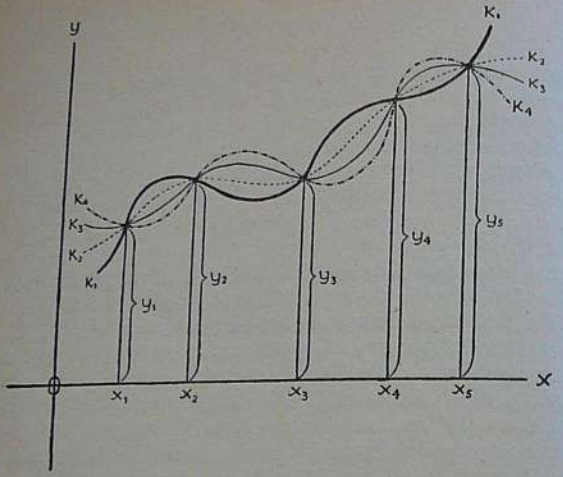

y
K₁
K₂
K₃
K₄
K₄
K₃
K₂
K₁
y₁
y₂
y₃
y₄
y₅
x₁
x₂
x₃
x₄
x₅
x

Fig. 70

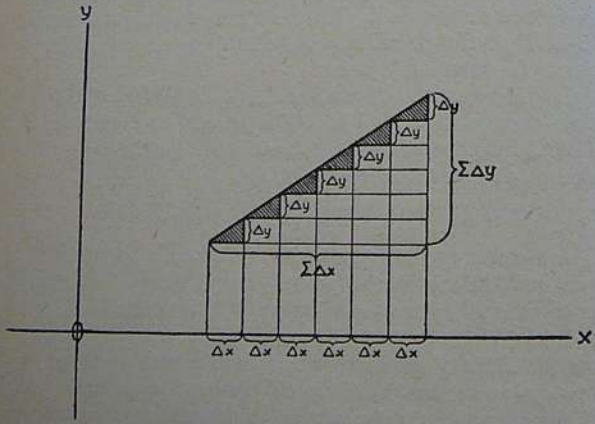

y
Δy
Δy
Δy
Δy
Δy
Δy
ΣΔy
ΣΔx
Δx
Δx
Δx
Δx
Δx
Δx
x

Fig. 71

dall'ultima figura del capitolo precedente i valori del logaritmo « non » variano linearmente. Per piccoli intervalli l'errore che si commette è assolutamente trascurabile, ma va tenuto presente che « errore c'è ». Per apprezzarlo al suo giusto valore esaminiamo il significato geometrico dell'interpolazione.

Segniamo in assi cartesiani, corrispondentemente ai numeri noti che porteremo in ascisse, le rispettive ordinate, cioè le y, cioè i logaritmi di essi.

Chiameremo « ordinate disperse » quelle, che ancora non conosciamo, dei numeri compresi fra i due numeri dati. Dal momento che noi conosciamo la funzione $y = f(x)$ e la disegniamo, non esistono più ordinate incognite, perchè ad ogni ascissa compresa fra le due date, corrisponde una ordinata limitata dalla curva disegnata.

Siccome fra due ordinate qualunque si può far passare (v. fig. 70) una curva qualsiasi, il problema dell'interpolazione non è definito che quando sia definita la curva o la sua equazione.

È vero che possiamo sempre supporre una interpolazione lineare, stabilendo che la curva incognita sia una retta. Questo si fa per es. nelle P.P. delle tavole dei Logaritmi, ma allora abbiamo solo un valore approssimato di interpolazione.

Se consideriamo l'intervallo fra due valori noti della x come somma delle differenze Px (per es. dei decimi) in cui l'abbiamo suddiviso, allora la differenza delle ordinate sarà pure la somma delle Δy corrispondenti. Ora supponiamo tutte le Δx uguali fra di loro: si vedrà dalla fig 71 che ad ogni Δx corrisponde un Δy e per delle Δx tutte eguali fra di loro, si avranno pure dei Δy tutti eguali e sussisterà la proporzione:

$$\Sigma \Delta x : \Sigma \Delta y = \Delta x : \Delta y$$

dove $\Delta x = \frac{\Sigma \Delta x}{n}$, cioè è eguale alla somma delle differenze divisa per il numero di parti o P.P.

Ora questo modo d'interpolazione è lecito solo nel caso in cui la curva, nel tratto considerato, possa confondersi con un tratto di retta.

Nella pratica e nella teoria del Calcolo statistico non si adoperano solo interpolazioni lineari come quella ora illustrata, ma si considerano interpolazioni entro curve paraboliche di un ordine n qualunque, la cui equazione sarebbe:

$$y = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + a_3 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x^2 + a_{n-2} x^1 + a_n x^0.$$

Per interpolare in questo caso si usano metodi speciali, rigorosi, intelligentissimi, che qui non è il caso di esaminare. Con essi si può rispondere alla domanda: come si procede nell'interpolazione, data che sia l'equazione della curva che unisce le ordinate estreme? Come si comprende facilmente qui la dipendenza dei Δy rispetto ai Δx, non più lineare, può essere una qualunque, anche assai complicata. Di più ha importanza qui il sapere se le ordinate note sono equidistanti fra di loro o no. Si hanno poi oltre alle interpolazioni « lineari » e « paraboliche » molti altri tipi d'interpolazione. E per quanto si possano dare infiniti modi e metodi di interpolazione, si può praticamente trovare una soluzione sovente molto precisa ad un problema pur così indeterminato.

Per colorire ed illustrare questa teoria che appare assai grigia e uniforme, facciamo un esempio: In Italia si fa all'incirca ogni dieci anni il censimento della popolazione. L'abbiamo fatto recentemente nel 1936, nel 1926, nel 1911 ecc. Supponiamo di voler determinare la popolazione in un anno intermedio: se facciamo astrazione da epidemie, guerre o simili cause di improvviso spopolamento, abbiamo qui da risolvere un problema d'interpolazione. È anche un problema geometrico con ordinate non equidistanti. Eppoi potrebbe interessarci di sapere quale potrebbe essere la popolazione in Italia fra tre, fra cinque, fra dieci anni.

Qui abbiamo allora un problema di « estrapolazione » perchè usciamo dal campo dei limiti noti.

Esso presuppone che l'andamento della curva sia o si mantenga regolare anche oltre i limiti noti.

Ecco ancora un esempio dall'Astronomia. Un osservatore ha individuato con precisione alcuni punti della traiettoria di una cometa che si è mostrata in una regione della volta stellata, per poi tosto scomparire. Non si è potuto determinare gran che della traiettoria dell'astro peregrino, ma è possibile di calcolarla per via di interpolazioni e di estrapolazioni, con una approssimazione tanto maggiore quanto meglio scelte sono state le osservazioni fatte. Si può persino determinare quali azioni (di altri corpi celesti) hanno provocata quella data traiettoria.

Aggiungiamo ancora che i concetti d'interpolazione ed estrapolazione hanno una importanza ed una portata che trascende la pura Matematica: quasi inconsciamente ci accade sovente d'interpolare o di « prolungare le linee » nelle attività più diverse della vita quotidiana e di fare previsioni, per non dire la brutta parola « pronostici ». E se, come i matematici, sappiamo usare con precisione dell'estrapolazione, le nostre previsioni potranno essere attendibili.

Ho ormai esaurito il compito che ci eravamo proposto ed io spero e credo di aver mantenuto la mia promessa: di guidare il lettore dall'abbaco fino all'integrale.

Quando talvolta, nelle sfere più alte del nostro argomento, ci siamo trovati in una posizione insoddisfacente, ed io ho dovuto quasi continuamente dire: questo o quel problema, questa o quella soluzione esorbita di assai dai limiti della nostra trattazione elementare, — mi perdoni il lettore — questo era dovuto alla mia insufficienza. Il riconoscimento dei proprî limiti non può mai deprimerci, anzi può stimolare gli spiriti retti ed onesti a più e meglio apprendere.

Ogni individuo, come ogni popolo, l'umanità stessa nel suo insieme, ha tanto avvenire dinanzi a sè, quanti problemi insoluti di cui ha dolorosa coscienza. La fine del progresso è apparenza soggettiva e il cosiddetto compimento è congelamento e cristallizzazione.

Ciascuno dei nostri eroi delle matematiche: Pitagora, Euclide, Archimede, Apollonio di Perga, Alchwarizmi, Keplero, Cartesio, credettero che il ciclo del progresso si fosse chiuso — come anche ora alcuni credono di poter affermare —. E invece vennero Galileo, Newton, Leibnitz, Lagrange, Gauss, Weierstrass, Minkowski, Hilbert ed altri ancora vengono e verranno. Anche nella Matematica.

Quand'anche noi, nella nostra rapida scorsa, non siamo penetrati che di poco nel mondo delle Matematiche, vogliamo tuttavia, e con un certo orgoglio, dirci che per lo meno abbiamo, in principio, esaminato a fondo le cose essenziali, conseguendo un risultato assai importante. Noi sappiamo almeno che cosa si può ottenere, che cosa si può imparare, che cosa si può ancora investigare con la Matematica.

E in questo nostro studio abbiamo potuto acquistare il rispetto della vera grandezza dello spirito. E qui mi si lasci citare un detto del Faust: « Noi siamo abituati (a vedere) che la gente sprezza quello che non capisce ». Se formiamo la « funzione inversa » di queste parole di Goethe la esprimeremo in modo da considerarla come premio della nostra fatica: « L'uomo non ha rispetto che per quello che capisce ». Il nostro rispetto è un riconoscimento del valore dell'oggetto rispettato.

E l'individuo, come il popolo, come l'umanità tutta, deve tendere verso quello che ha realmente valore. Non nel proprio interesse, ma « ad majorem Dei gloriam ».

CONGEDO DEL TRADUTTORE

Giunti in vetta con la guida esperta del Colerus e supposto che nessuno dei lettori del libro abbia abbandonata la partita a mezza via, esaminiamo la diversa reazione dei varii rocciatori dopo l'arrampicata.

Ci sarà che si esalta della vittoria conseguita sulle difficoltà così abilmente superate e sogna maggiori e più ardue imprese. Questo tipo di lettore non ha bisogno di essere incoraggiato: gli ricorderemo prudentemente che l'arte è lunga e la vita è breve.

C'è chi, invece si accascia, affranto dallo sforzo compiuto e non pensa neppure a godere del panorama. Questo lettore lo lasceremo riposare, poi gli consiglieremo di riandare, con la mente, le cose interessanti che ha trovato per via e gli domanderemo se non ha, dal punto in cui è giunto, una visione più ampia di quegli studi che gli sono apparsi dapprima così difficili. È il tipo di lettore che va incoraggiato e stimolato.

C'è poi chi si stupisce che le difficoltà che prevedeva dall'inizio, sieno state superate con tanta facilità. Questo nostro compagno deve anzitutto ringraziare l'abile sua guida; la quale ha saputo rendergli agevoli i mali passi e dargli la sensazione della bellezza dell'arrampicata. Ma non s'illuda costui che non ci sieno difficoltà più serie in matematica. Si alleni ora, con lungo esercizio (qui bisognerebbe dire con numerosi esercizi — e diremo tosto dove potrà trovarne) a far da sè, a risolvere le difficoltà — senza guida.

E questo esercizio è certo più interessante e proficuo di qualunque esercizio di enimmistica.

In un appendice del volume originale del Colerus, il suo professore indica al lettore dove potrà trovare materia di studio in trattati tedeschi.

Il traduttore non è professore, ma pur vivendo la professione pratica, si è assai occupato di metodi d'insegnamento. Non si propone di dar qui una bibliografia, neppur succinta, dei testi da consigliarsi allo studioso che è stato invogliato dalla lettura del libro del Colerus ad approfondire le sue cognizioni di matematica. Chiede quindi, *a priori*, venia ai numerosi professori italiani, autori di opere certamente pregevoli, ma che egli non ha avuto occasione di leggere, e consiglierà quelle che egli conosce e che crede adatte allo scopo.

Un libro che gli pare un utilissimo complemento alla prima parte del Colerus, e che fu scritto seguendo la falsariga dei programmi scolastici, ma con una originalità di concezione affine a quella del Colerus, è *L'Aritmetica e l'Algebra* (2 volumi) del compianto prof. Michele Leoncini edita dal Vannini di Brescia: lavoro coscienzioso di un nostro chiaro insegnante da consultarsi con profitto anche da chi deve insegnare. Per quanto riguarda l'Algebra elementare è completo e contiene esercizi numerosi e bene scelti.

Anche eminenti nostri matematici come il prof. Marcolongo e il prof. Vivanti ci hanno dato trattati scolastici elementari pregevolissimi: di stile più classico del precedente, chiari e concisi e sopratutto rigorosi.

Ricordiamo: L'« *Algebra ed Elementi di Analisi Matematica* » del prof. G. Vivanti, edita dal Lattes di Torino. I « *Complementi di Algebra ed Analisi* » del prof. Marcolongo, editi dalla S. A. Ed. Dante Alighieri di Milano.

E, in campo più vasto, la pregevole « *Enciclopedia delle matematiche elementari* » dei proff. Berzolari, Vivanti e Gigli, edita dall'Hoepli di Milano.

Fra le traduzioni di opere straniere, meritano menzione: il brioso libretto del Bessière: *Il calcolo differenziale ed integrale reso facile ed attraente* (Traduz. C. Rossi), e quello del libro di S. Thompson (citato dal Colerus): *Calcolo infinitesimale*, entrambi editi dall'Hoepli di Milano.

Non si confondano soprattutto queste opere con quei numerosi libri che vogliono dare l'illusione che la matematica si possa apprendere senza studio (ne esiste effettivamente uno che porta questo titolo!).

La superficialità in matematica è più dannosa che in qualunque altra scienza: anche chi possiede il famoso bernoccolo *deve* studiarla seriamente ed assiduamente. Le idee chiare sgorgano raramente come l'acqua di polla: sono generalmente state filtrate e rifiltrate nella mente fino a che riescano limpide.

Lettore cortese non ho altro da aggiungere:

« Posto t'ho innanzi ed or per te ti ciba »

Ing. T. Jervis

49418 BIBLIOTECA CIVICA-SCHOOL

INDICE

Prefazione del traduttore ..... pag. V
Prefazione dell'Autore ..... » VII

CAP. I – La « Vera Cabala » ..... » 1
» II – Il sistema decimale ..... » 8
» III – Simboli e comandi ..... » 14
» IV – Combinazioni ..... » 19
» V – Permutazioni ..... » 21
» VI – La combinazione in senso ristretto .. » 29
» VII – Variazioni ..... » 39
» VIII – Primi passi nell'Algebra ..... » 45
» IX – Notazione algebrica ..... » 51
» X – Operazioni algebriche ..... » 59
» XI – Le frazioni ordinarie ..... » 82
» XII – Equazioni ..... » 94
» XIII – Equazioni indeterminate ..... » 111
» XIV – Potenze negative e frazionarie ..... » 121
» XV – Numeri irrazionali ..... » 126
» XVI – Frazioni sistematiche ..... » 131
» XVII – Funzioni ..... » 139
» XVIII – Il Teorema di Pitagora ..... » 153
» XIX – Funzioni angolari ..... » 160
» XX – Numeri immaginari ..... » 167
» XXI – Coordinate ..... » 186
» XXII – Geometria analitica ..... » 196
» XXIII – Problemi di quadratura ..... » 207
» XXIV – Il differenziale e il problema della rettificazione ..... » 222

» XXV – Relazione fra la derivata e l'operatore integrale ..... pag. 230
» XXVI – Delle tre specie di nulla..... » 234
» XXVII – Il teorema del binomio..... » 238
» XXVIII – La quadratura della parabola ..... » 247
» XXIX – Serie ..... » 254
» XXX – Tecnica del calcolo differenziale .... » 259
» XXXI – Massimi e minimi..... » 269
» XXXII – La tecnica del calcolo integrale ..... » 278
» XXXIII – Valore medio ed integrale definito... » 285
» XXXIV – Altri problemi di quadratura ..... » 295
» XXXV – Logaritmi ..... » 302
» XXXVI – Interpolazioni, estrapolazioni. Conclusione ..... » 316
Congedo del traduttore ..... » 323